

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра астрономии и космической геодезии

САХИБУЛЛИН Н.А., БИКМАЕВ И.Ф.

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АСТРОФИЗИКА.
ЗВЕЗДНЫЕ АТМОСФЕРЫ. ЧАСТЬ 1**

Учебное пособие

Казань – 2015

УДК 524.3-6

ББК В22

Принято на заседании кафедры астрономии и космической геодезии

Протокол № 12 от 15 мая 2015 года

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, доцент,
старший научный сотрудник Института астрономии РАН

Н.С. Бахтигараев

Сахибуллин Н.А. , Бикмаев И.Ф.

**Теоретическая астрофизика. Звездные атмосферы. Часть 1
(Учебное пособие)**

Сахибуллин Н.А., Бикмаев И.Ф. – Казань: Казан.ун-т, 2015. – 116 с.

Данное пособие восполняет существенный недостаток в учебной литературе по теоретической астрофизике. В нем сделан акцент на основных принципах в моделировании звездных атмосфер. Излагаются вопросы взаимосвязи физики и астрофизики, вопросы решения уравнения переноса излучения в астрофизической плазме с учетом важных механизмов поглощения и излучения. Рассматриваются вопросы «классической» теории звездных атмосфер: «серое» приближение, использование понятия абсолютно черного тела. Приведены основные существующие модели атмосфер как «классические», так и модели нового поколения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Астрономия».

© Сахибуллин Н.А., Бикмаев И.Ф., 2015

© Казанский университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ	СТР.
Вступительные замечания	4
Разделы теоретической астрофизики	5
Полезная литература	6
Что такое звездные атмосферы ?	7
Почему изучают звездные атмосферы ?	7
Характеристики звезд	9
Краткая история спектроскопии и теории звездных атмосфер	12
Физика и астрофизика	13
Основные предположения теории	25
Механизмы переноса энергии	27
Характеристики поля излучения	36
Уравнение переноса излучения (дифференциальный вид)	46
Уравнение переноса излучения (интегральный вид)	53
Условие лучистого равновесия	55
Локальное термодинамическое равновесие	58
Абсолютно черное тело	60
Теория серой атмосферы	63
Приближенные методы в теории серой атмосферы	65
Методы решения уравнения переноса излучения	76
Коэффициенты поглощения	78
Покровной эффект	94
Классические модели атмосфер	97
Модели нового поколения	108
Простой пример расчета модели	112

Вступительные замечания

Успехи астрофизики последних десятилетий коренным образом изменили наши представления о строении Вселенной и ее компонентов. Это осуществилось, во-первых, благодаря развитию новых методов в получении наблюдательного материала. В настоящее время эшелле-спектрографы способны получать спектры высокого разрешения во многих порядках. Фотографические пластинки были заменены принципиально новыми приемниками (например, CCD), которые имеют линейность и высокое отношение сигнала к шуму, что позволяет производить точную калибровку и измерения изображений очень слабых звезд и протяженных объектов.

Был осуществлен прогресс и в развитии теоретической астрофизики. Это в большой степени касается изучения звезд и их атмосфер. В этой области науки было осуществлено существенное продвижение в понимании физики взаимодействия излучения с веществом. Кроме того, физики и астрофизики достигли высокой точности в определении важных атомных параметров, определяющих излучение звезд как в непрерывном спектре, так и в линиях. Внедрение мощных компьютеров позволило осуществить численное моделирование сложных физических процессов: учет «покровного» эффекта с включением миллионов спектральных линий, отказ от классических (и физически не обоснованных) предположений в теории, учет конвекции, учет расширения и др. Исследователь, намеревающийся сделать вклад в эти исследования, должен обладать определенным объемом знаний в различных областях физики: классическая механика и электродинамика, атомная и молекулярная физика, физика элементарных частиц, квантовая механика, общая и специальная теория относительности и др.

Но, к сожалению, имеющаяся учебная литература в области звездных атмосфер является весьма скудной и во многом устаревшей. Это явилось основной причиной появления этого пособия.

1. Данное Пособие ликвидирует имеющийся пробел в учебной литературе по изложению одного из главных разделов теоретической астрофизики – звездные атмосферы.
2. Естественно, что этот курс сильно связан со сведениями, изложенными в курсах физики. Прежде всего это относится к первой части материала и Дополнению.
3. В Пособии также излагаются результаты исследований, проведенных казанскими астрофизиками в последние годы. Успехи казанских астрономов в этой области астрофизики признаны астрономическим сообществом.

В большинстве случаев учебники и пособия по теории звездных атмосфер ссылаются на используемые формулы, приводимые без их вывода. В нашем пособии мы старались в Дополнении привести некоторые полезные для понимания выводы.

Автор пособия открыт для возможной дискуссии по необходимым добавлениям и исправлениям к содержанию. Некоторые приводимые в Пособии рисунки были заимствованы из имеющейся литературы с разрешения авторов.

Несколько полезных советов

В Пособиях и в Дополнении будет использоваться много формул, которые могут содержать непредумышленные ошибки (опечатки, описки и др.) и верность которых следует проверять, используя некоторые правила. Некоторые из них приведены ниже.

- 1) Самый главный принцип это понимать физический смысл полученных или приведенных в Пособиях формул или уравнений.
- 2) Важно проверять формулы и уравнения, анализируя их и пытаясь ответить себе на такие вопросы:
 - верна ли размерность используемых величин и полученного результата?
 - от каких параметров должен зависеть результат, исходя от очевидных физических соображений?
 - как ведет себя результат в очевидных предельных случаях?
 - должна ли быть симметрия в приведенном результате?
 - и т.д.

Приведем один пример. В модели атома Бора электрон вращается вокруг ядра с зарядом Z . Допустим, что студенты получили разные формулы для энергии связи электрона на ближайшей к ядру орбите:

$$\begin{aligned} \text{A) } E &= \frac{2\pi m e^2 c}{h} & \text{B) } E &= Z^2 m c^2 & \text{C) } E &= \frac{\pi^2 Z^2 m e^4}{h^2} \\ \text{D) } E &= \frac{m e^4}{2Z^2 h^2} & \text{E) } E &= \frac{\pi^2 Z^2 m e^4}{h} \end{aligned}$$

Используя выше приведенные приемы, студенту следует определить, какие из этих формул заведомо не верны. Используйте и чисто физические аргументы.

Разделы теоретической астрофизики

Теоретическая астрофизика своими разными разделами присутствует в различных областях астрономии (см. рис. 1). Ее целью является интерпретация наблюдательных фактов о небесных объектах, используя уже известные законы физики или разрабатывая новые подходы, связанные со спецификой изучаемого объекта.

Главным разделом теоретической астрофизики является теория переноса излучения, определяемого его взаимодействием с веществом. Именно успехам в развитии этой теории обязаны достижения в изучении физики звездных атмосфер и других разделов астрофизики, включая изучение взаимодействия плазмы с излучением в экстремальных условиях, например, как в газовых туманностях с концентрацией частиц $N \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$ и с температурой $T \sim$ несколько кельвинов или в недрах звезд с параметрами

$N \sim 10^{26} \text{ см}^{-3}$ и $T \sim 10^7 \text{ К}$. В этом пособии мы делаем акцент на одном из разделов теоретической астрофизики – на теорию излучения, образованного в звездных атмосферах.

Полезная литература

- Сахибуллин Н.А. «Методы моделирования в астрофизике. Том I. Звездные атмосферы», Изд. «ФЭН», Казань, 1998
- Сахибуллин Н.А. «Методы моделирования в астрофизике Том II. Определение фундаментальных параметров звезд», Изд. «ФЭН», Казань, 2003.



Рис. 1. Разделы теоретической астрофизики

- Соболев В.В. «Курс теоретической астрофизики», изд. «Наука», Москва, 1985, (<http://astro-archive.prao.ru/books/showBook.php?idBook=434>)
- Грей Д. «Теория и наблюдения звездных фотосфер», изд. «Мир», Москва, 1980, (<http://www.twirpx.com/file/1090432/>)
- Kurucz R. 1992, модели атмосфер – CDR диски.
- Мустель Э.Р. «Звёздные атмосферы», Москва, Государственное издательство физико-математической литературы, 1960, (<http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=4264016>).

Часть книг стала уже библиографической редкостью, но они доступны в интернету. Другие книги доступны и находятся в библиотеке КФУ и на кафедре астрономии и кос-

мической геодезии. Для более углубленного изучения мы прежде всего порекомендовали бы книгу Михаласа Д. «Звездные атмосферы» , 2 тома, изд. «Мир», Москва, 1982, (<http://alexandr4784.narod.ru/mihalas1.htm>).

Замечательным руководством является книга И. Хубены и Д. Михаласа "The theory of stellar atmospheres", к сожалению, не опубликованная и не переведенная с английского языка (http://aegis.as.arizona.edu/~hubeny/SA3/Stellar_Atmospheres.pdf).

Главным достоинством этой книги является то, что все физические процессы рассматриваются с двух точек зрения: классической физики и квантовой механики.

Что такое звездные атмосферы?

Все приведенные ниже определения понятия «звездная атмосфера» (далее кратко обозначаемая как ЗА) справедливы, поскольку они отражают разные стороны процессов, происходящих в ней (см. также рис. 2):

- переходные слои от звезды к межзвездной среде;
- зона, где формируется наблюдаемое излучение;
- зона, на внешней границе которой излучение отрывается от вещества;
- плазма в сильном поле излучения;
- зона звезды, в которой нет источников производства энергии.

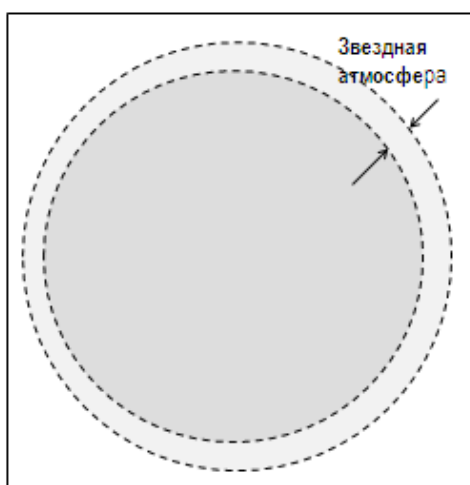


Рис. 2. Звездная атмосфера как верхний слой звезды.

Почему изучают звездные атмосферы?

Аргументов в пользу необходимости изучения ЗА очень много, приведем лишь некоторые.

- Звезды и их атмосферы являются единственными объектами во Вселенной, которые можно увидеть, измерить и произвести диагностику, не привлекая никаких трудно проверяемых наблюдениями предположений.

- Звезды дают 80% всего излучения в космосе или непосредственно или посредством через излучение, возникающее за счет нагрева звездой окружающих звезду газа и пыли.
- Краеугольным камнем теории звездных атмосфер является теория переноса излучения. А такую теорию, по сути дела, нельзя избежать при исследовании всех наблюдаемых объектов Вселенной. Пример 1: модели атмосфер позволяют оценить ультрафиолетовые потоки от звезд, определяющие физику газовых туманностей. Пример 2: теоретические спектры моделей атмосфер позволяют воспроизвести спектры звездных скоплений, районов звездообразования и галактик. Изучая методом моделей атмосфер ярчайшие звезды удаленных галактик, можно делать выводы о химическом составе галактик и оценивать расстояния до них.
- Из физики звезд известно, что эволюция звезды определяется эффективностью излучения, выделяемого звездой в окружающее пространство. Другими словами, строение атмосферы играет большую роль в эволюции самой звезды.
- Атмосферы дают информацию о химическом составе звезд разного возраста, а значит и информацию о химической эволюции Галактики и о проверке гипотезы Большого Взрыва.
- Теория звездных атмосфер обязательно пригодится при исследованиях недавно открытых очень маломассивных звезд, коричневых карликов и гигантских экзопланет.
- Теория звездных атмосфер может дать, информацию о наличии «зон обитаемости планет» и о возможности наличия жизни на них.
- Для некоторых звезд (гигантов и сверхгигантов) атмосфера составляет существенную часть протяженности верхних слоев. Это означает, что граничные условия для моделей самих звезд определяются структурой атмосферы.
- Именно изучая звездные атмосферы, можно перевести наблюдаемую диаграмму Рассела-Герцшпрунга в координатах «цвет - звездная величина» в теоретическую диаграмму в координатах «светимость - эффективная температура», и тем самым определить эволюционный статус звезды.
- Методы исследований «классических» звездных атмосфер могут быть с успехом применены к самым разнообразным и мало исследованным типам звезд, неполный список которых дан в Дополнении.

Для удобства пользователей астрономами были созданы очень удобные базы данных об астрономических объектах, включая и звезды, например, база данных SIMBAD: <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-fid>. Задавая наименование или обозначение объекта, можно получить следующую информацию:

- библиографию по этому объекту;

- его обозначения во всех других каталогах;
- лучевые скорости, параллакс, звездные величины и др.

Для теоретической астрофизики очень полезны также и следующие источники. Наиболее полные списки линий с необходимыми атомарными данными находятся на сайтах:

- http://www_amdis/iaca.org/AMDIS
- http://acldata/nist.gov/nist_atomic_spectra.html
- <http://wwwsolar.nrl.navy.mil/chianti.html>
- <http://kurucz.harvard.edu> (список Куруца (Kurucz)) – содержит данные о 50 млн. атомарных линиях и 150 млн. молекулярных линий.
- <http://www.astro.uu.se/~vald> -венский список (VALD – Vien Astronomical Line Data)
- <http://physics.nist.gov/PhysRevData>

Сведения о химических элементах содержатся на сайте:

http://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/element_name.htm

Характеристики звезд

Характеристики звезд можно разделить на две категории: глобальные характеристики звезды в целом и локальные характеристики по поверхности или в более глубоких слоях.

Глобальные характеристики: температура, ускорение силы тяжести, химический состав, масса, радиус, светимость, скорость осевого вращения, возраст, распределение энергии в спектре и др.

Локальные:

- конвекция – очень плохо изучена (на примере Солнца), отсутствует детальная теория;
- хромосфера и переходные слои – физика происходящих в них процессов требует более детального изучения;
- звездные ветры, потеря массы звезды, теория находится на начальном этапе;
- магнитная активность и ее роль в строении атмосфер также требуют развития теории.

Мы не будем давать детальное описание методов определения параметров звезд. Читателя мы отсылаем ко 2 тому нашей монографии. «Методы моделирования в астрофизике. Том 2. Определение фундаментальных параметров звезд»

Эффективная температура T_{eff} - температура абсолютно черного тела, интегральный поток от которого равен наблюдаемому интегральному потоку от звезды. Это означает, что T_{eff} не есть реальная температура, а просто тот параметр который надо подставить в формулу $4\pi R^2 \sigma T^4$, чтобы получить поток, равный наблюдаемому при данном радиусе. К сожалению, разные авторы используют разные методы определения температуры, разные шкалы температур, в результате чего возникают случайные ошибки в $\pm 50-100$ K и систематические различия в результатах в 200 K. Пример сравнения значений T_{eff} , полученных разными методами приведен на рис. 3.

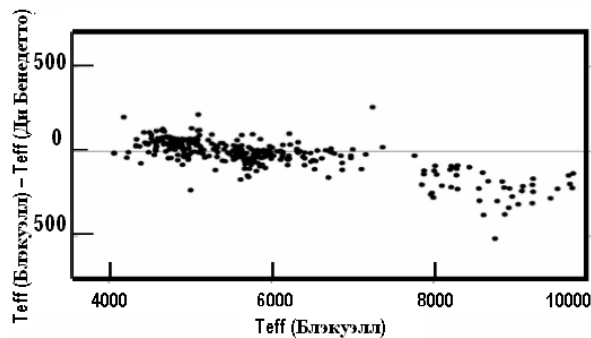


Рис. 3. Пример сравнения значений T_{eff} , полученных разными методами

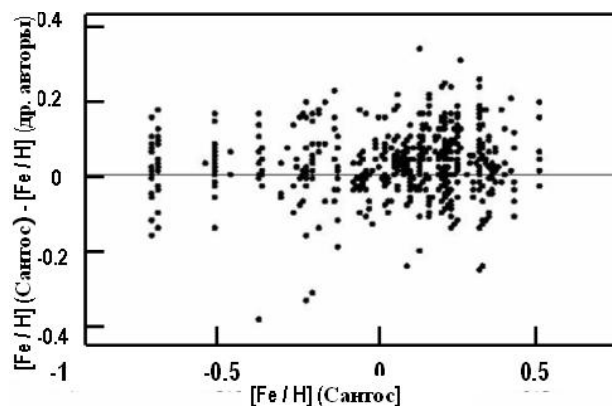
Ускорение силы тяжести – $\log g$

Одним из методов определения ускорения силы тяжести является спектроскопический метод, основанный на теории ЗА. Для примера:

$\log g$ для Земли равно 3.0 (10^3 см/с^2), $\log g$ для Солнца = 4.44 ,
 $\log g$ для белого карлика = 8 , $\log g$ для сверхгиганта = 0 .

Типичные случайные ошибки достигают величины в $\log g$ в ± 0.20 , а систематические – в 0.8 .

Химический состав – содержание элементов относительно водорода = N_{el} / N_H



Солнечный химический состав считается стандартом. Часто используется понятие «металличность» $[Fe / H]$, точность определения которого около $0.1-0.2$ (см. рис. 4).

Рис. 4 Сравнение определений $[Fe / H]$ разными авторами.

Само значение «металличности» определяется по формуле

$$\left[\frac{Fe}{H} \right] = \frac{\sum_{el \geq 3} m_{el} 10^{\log(N_{el} / N_H)}}{\sum_{el \geq 1} m_{el} 10^{\log(N_{el} / N_H)}}$$

Здесь m_{el} есть масса химического элемента el , (N_{el}/N_{tot}) – содержание элемента по отношению к полному числу атомов. Такая запись вызвана тем, что обычно в каталогах и

справочниках табулируются величины $\log(N_{el}/N_{tot})$. Числитель учитывает все элементы, кроме водорода и гелия. Знаменатель учитывает все элементы. Для конкретной звезды эта величина определяется по отношению к Солнцу:

Пример: $[Fe/H]=-1$ означает содержание тяжелых элементов в 10 раз меньше, чем на Солнце.

Радиусы звезд. Существует несколько методов определения радиусов звезд: по затменно-переменным, по покрытиям звезд Луной и др. Преимущественный метод определения это интерферометрия в разных вариантах: использование интерферометра Майкельсона, спеклинтерферометрия и интерферометрия интенсивности. Ниже даны рисунки (рис. 5), иллюстрирующие распределение более 1660 звезд по угловым диаметрам и по спектральным классам. На нижней панели приведены ошибки измерений.

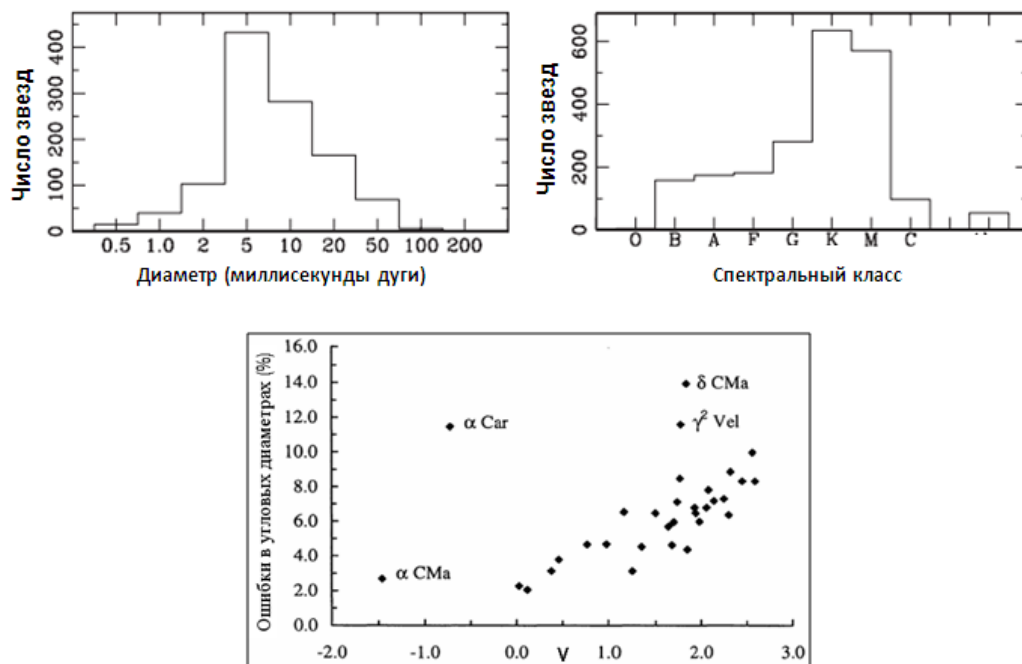


Рис 5. Два верхних графика: распределение по диаметрам и по спектральным классам. Внизу: ошибки в определении угловых диаметров 32 звезд по интерферометрическим данным интерферометра в Наррабри.

Масса звездной атмосферы

Протяженность ЗА очень мала (см. рис. 2): $\Delta R / R \ll 1$. Масса атмосферы при средней плотности вещества ρ равна

$$M_{атм} = \bar{\rho} \frac{4}{3} \left[(R + \Delta R)^3 - R^3 \right] \approx \bar{\rho} 4\pi R^2 \Delta R.$$

Для Солнца, например,

$$R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}, \Delta R_{\odot} \approx 300 \text{ км} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ см}, \bar{\rho} = 1.7 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3.$$

Тогда имеем: $M_{\text{атм}} = 3 \cdot 10^{21} \text{ г}$, $M_{\text{атм}} / M_{\odot} \approx 3 \cdot 10^{21} / 2 \cdot 10^{33} \sim 10^{-12}$.

Как видно, масса ЗА по сравнению с массой самой звезды ничтожно мала. Но ее роль в образовании видимого излучения является главенствующей, так как именно она определяет характеристики выходящего из нее излучения!

Краткая история исследований по спектроскопии и по звездным атмосферам.

Из исторических документов следует, что первыми учеными, которые интуитивно говорили о разложении излучения в спектр, были арабские исследователи Аль Ширази и Аль Фариси (12-13 в.), когда они изучали происхождение радуги. Последующая история развития спектроскопии в хронологическом порядке изложена в Дополнении. Остановимся на некоторых достижениях более подробно.

Волластон У. впервые пронаблюдал в 1810 году 7 темных линии в спектре Солнца. Его ошибочная интерпретация была такой: темные линии это провалы, разделяющие разные цвета в спектре. Но пионером в области звездной спектроскопии следует считать Фраунгофера Дж. Он уже с 11 лет собирал оптические инструменты. Работая в военной фирме и калибруя оптические стекла, он обнаружил около 475 линий в спектре Солнца, которые не соответствовали «пробелам» Волластона (см. рис. 6). Получив спектры других звезд, он обнаружил, что в спектрах разных звезд положение линий различно. Тем самым он впервые установил, что эти линии не имеют земного атмосферного происхождения. Ему даже удалось отождествить одну линию как линию натрия. Чуть позднее Гершель В. первым указал на то, что линии образуются в холодной атмосфере Солнца.

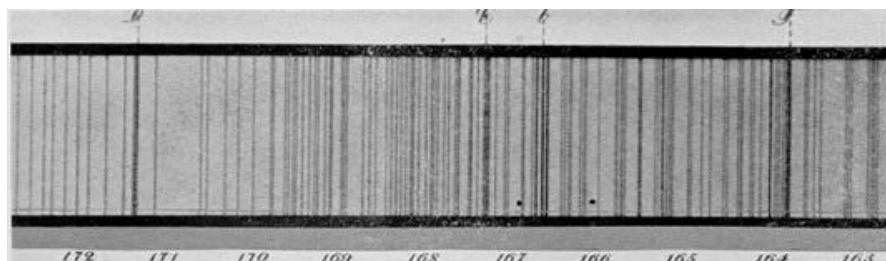


Рис. 6. Спектр Солнца, полученный Дж.Фраунгофером.

Позднее в середине 19 столетия Кирхгофом были установлены три закона излучения. В 1860-1880 годах Секки, Хеггинс и Фогель, используя эти законы, установили, что 4000 звезд по виду призмленного спектра можно разделить на 4 группы. Звезды с сильно различающимися спектрами составляют незначительную долю. В дальнейшем такое разделение на группы было положено в основу спектральной классификации звезд.

Краткая хронология исследований в теории звездных атмосфер изложена в Дополнении. Первым в этой области следует считать немецкого ученого А. Шустера. В 1905 году он стал заниматься вопросами образования линий поглощения и эмиссии в атмосфере, не используя появившиеся позднее представления о строении атома. Акцент он делал на механизм рассеяния в линиях, решая уравнение переноса излучения

$$\cos \vartheta \frac{dI_{\nu}}{dz} = -\alpha_{\nu} I_{\nu} + \varepsilon_{\nu}.$$

Годом спустя К. Шварцшильд впервые ввел концепцию «лучистое равновесие» для неизотермической атмосферы. В 1914 году он изучал процессы чистого поглощения и высказал идею о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР).

В 1929 году Е. Милн объединил эти два подхода (рассеяние + поглощение) и получил уравнение переноса в интегральной форме. Он также обосновал концепцию локального термодинамического равновесия (ЛТР) для звездных атмосфер. Впервые установил «несерость» атмосферы - получил зависимость коэффициента поглощения от частоты (для Солнца). А в своей Бакерианской лекции (1929) впервые высказал идею численного моделирования звездных атмосфер. К сожалению, в этой лекции он подвел итог всех своих 16 статей по звездным атмосферам и позднее стал заниматься внутренним строением звезд и космологией. Первую модель атмосферы и ее теоретический спектр получил У. МакКри в 1931 году (см. рис. 7). Им были рассчитаны три чисто водородные модели с $T_{eff}=5700, 10000, 15000$ К. Дальнейшие успехи в моделировании звездных атмосфер связаны с именами зарубежных и отечественных ученых: Стремгрена, Унзоляда, Чандрасекара, Мустеля, Соболева, Сапара и др.

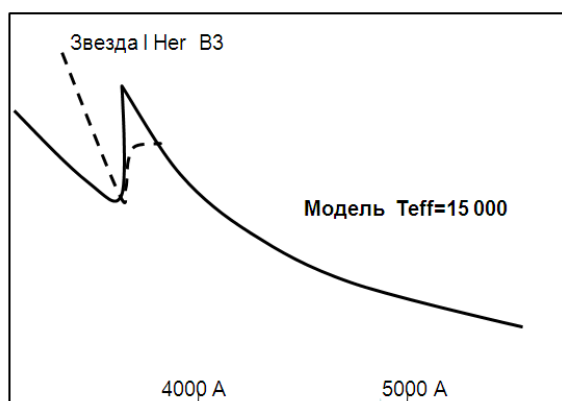


Рис. 7. Первый теоретический спектр звезды, рассчитанный по модели атмосферы.

Физика и астрофизика ЗА

Строго говоря, главные принципы анализа звездных атмосфер были заложены не астрономами, а физиками в начале 20 столетия. Например, Планк объяснил зависимость монохроматического излучения от температуры излучающего тела. Затем в 1913 году Эйнштейн, Бор и Резерфорд разработали модель атома. Дальнейшее развитие

этой области астрофизики было связано с более глубоким пониманием радиационной физики, атомной спектроскопии, термодинамики поля излучения и статистической физики. Синтез этих разделов физики позволило развить теорию переноса излучения, важной для изучения ЗА.

Перед началом курса необходимо напомнить главные отличия двух основных подходов в объяснении физических процессов.

Классическая физика.

1) Физическая система является ансамблем частиц, которые взаимодействуют друг с другом за счет внутренних сил или за счет взаимодействия с внешней средой за счет внешнего поля.

а) Частица есть точечная масса, обладающая внутренними различными и измеряемыми физическими свойствами. Внутренние свойства не зависят от положения частицы, не изменяются со временем, не изменяются окружающей средой (например, зарядом и др.).

б) Набор состояний всех частиц определяет состояние систем в целом.

в) Перечень наблюдаемых характеристик частицы в какой-то момент времени определяет состояние этой частицы.

2) Все внутренние и внешние характеристики частицы могут быть измерены с высочайшей точностью. Например, координаты r и момент p частицы могут быть измерены точно в одно и то же время:

$$\{\vec{r}(t), \vec{p}(t), t > t_0\} \quad \vec{p}(t) = m \frac{d}{dt} \vec{r}(t).$$

3) Классическая физика предсказывает результат эксперимента путем вычисления траектории (положения и момента) частицы в любой момент времени, если известны координаты и момент в предыдущий момент времени:

- траектории определяются ньютоновской физикой, в частности, вторым законом механики;

- для получения траектории необходимо знать только потенциальную энергию и начальные условия для координат и момента движения.

4) Таким образом, классическая физика описывает детерминированную Вселенную: зная начальные условия и используя законы Ньютона, можно предсказать будущее Вселенной.

Квантовая физика

1) Понятия «частица» не существует: существует принцип дуализма: «частица + волна»:

- а) свойства квантовой частицы не могут быть определены, пока они не измерены;
- б) квантовая система есть соединение нескольких результатов измерения физических условий;
- в) можно говорить лишь о вероятности измерения какой либо физической характеристики;
- г) наблюдатель не может измерить микроскопическую систему без изменения некоторых ее свойств. Влияние наблюдателя не может быть сведено к нулю в принципе.

Все сказанное выше не является следствием несовершенства методики эксперимента. На самом деле это принцип устройства самой природы – принципа неопределенности Гейзенберга (ПНГ) (рис. 8):

а) результаты многих измерений не дают точного значения, а определяются с неопределенностью Δx для координат и Δp для импульса:

$$\Delta x(t_0) \Delta p_x(t_0) \geq \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}.$$

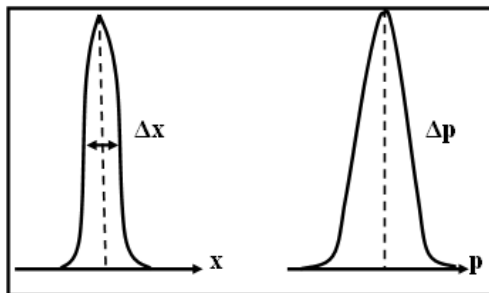


Рис. 8. Неопределенности Δx и Δp в определении координат и импульса.

б) ПНГ подрывает основы классической физики: если мы не можем определить координаты и момент частицы в момент t_0 , то мы не можем знать первоначальные условия и не можем установить и траекторию.

3) Итак, поскольку квантовая физика является вероятностной, то мы можем установить только статистическую информацию о системах.

При рассмотрении вопросов, связанных с теорией ЗА, мы при необходимости будем использовать оба подхода.

Совершенно очевидно, что объекты Вселенной являются лабораторией для физики, но при других и часто экстремальных условиях эксперимента. Законы физики также должны работать и в теории ЗА. Перечислим наиболее важные и широко используемые в этой теории.

Закон идеального газа.

Как указывалось выше, ЗА это плазма, состоящая из разнообразного набора частиц (атомы, ионы, молекулы). В теории ЗА этот газ рассматривается как идеальный, т.е. как ансамбль частиц, которые соударяются только упруго и которые не взаимодействуют

друг с другом силами притяжения или отталкивания. В таком газе вся внутренняя энергия это только кинетическая энергия частиц. Любое изменение этой энергии должно сопровождаться изменением температуры. Такой газ характеризуется только 3 параметрами: температурой, давлением и объемом. Соотношение между ними устанавливается кинетической теорией и называется законом идеального газа, который записывается в таком виде (один из вариантов вывода закона можно найти в Дополнении):

$$PV = nkT, \quad P = NkT, \quad N = \rho / \mu.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

P = давление (дина см⁻²), V = объем (см³), N = число частиц в единице объема, ρ = плотность газа (г см⁻³), n = число молей газа, R = постоянная Ридберга = (8.314 x 10⁷ эрг/моль/К), T = температура в Кельвинах, k = постоянная Больцмана (1.38 x 10⁻¹⁶ эрг/К), μ = средний молекулярный вес в АМУ (1 АМУ = атомная единица массы = масса атома водорода $m_H = 1.66 \times 10^{-24}$ г).

Состояние газа может меняться спонтанно (без взаимодействия с окружающей средой) или в результате такого взаимодействия. Если изменение происходит за счет внутренних причин (спонтанно), то могут реализоваться следующие случаи:

- процесс называется изобарическим, если давление остается постоянным ($dP=0$);
- процесс называется изотермическим, если температура остается постоянной ($dT=0$);
- процесс называется изометрическим, если объем остается постоянным ($dV=0$);
- если не происходит перенос тепла, то процесс называется адиабатическим.

В теоретической астрофизике часто используется понятие «средний молекулярный вес». Остановимся на его нахождении подробней. Введем обозначения:

X_i – содержание химического элемента i по весу ($\sum X_i = 1$);

$m_H = \text{AMU} = 1 / N_0 = 1.66053 \times 10^{-24}$;

A_i – атомный вес элемента в единицах АМУ;

$\rho_i = X_i \rho$ – плотность атомов элемента i (парциальная плотность);

Z_i – число протонов в ядре элемента i (заряд ядра);

n_i – число свободных частиц, поставляемых элементом i . Например, для полностью ионизованного газа имеем: $n_i = 1 + Z_i$ (1 ядро + Z свободных электронов). Для нейтрального газа имеем $n_i = 1$ (только нейтральная частица);

$N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ – число частиц на 1 моль вещества.

После простых преобразований получим:

$N_i = \rho_i / (A_i m_H) = (\rho X_i) / (A_i m_H) = (\rho X_i N_0) / A_i$ – число атомов элемента i в см³;

$N = \sum N_i = \rho N_0 \sum (n_i X_i) / A_i$ – полное число атомов всех элементов в см³;

$P = NkT = N_0 k \rho T / \mu$ – получили закон идеального в иной записи.

Запишем выражения, которые приводят к общей формуле для среднего молекулярного веса:

$$N_i = \frac{\rho_i}{A_i m_H} = \frac{\rho X_i}{A_i m_H} = \frac{\rho X_i}{A_i} N_0, \quad N = \sum_i n_i N_i = \rho N_0 \sum_i \frac{n_i X_i}{A_i},$$

16

$$P = NkT = \frac{N_0 k}{\mu} \rho T, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{n_i X_i}{A_i}.$$

Частные случаи: только ионизованный водород – $X_H=1, A_H=1, n_H=2, \mu=1/2$; только ионизованный гелий – $X_{He}=1, A_{He}=4, n_{He}=3, \mu=4/3$.

Для смеси химических элементов с содержанием по массе X (водород), Y (гелий) и Z (тяжелые элементы) формула несколько усложняется:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{Xn_H}{1.008} + \frac{Yn_{He}}{4.004} + Z \left\langle \frac{n_i}{A_i} \right\rangle.$$

Величина $\left\langle \frac{n_i}{A_i} \right\rangle$ является усреднением по тяжелым элементам. Что же касается величины A_i , то для тяжелых элементов она приблизительно равна (см. рис. 9)

$$A_i \approx 2Z_i + 2.$$

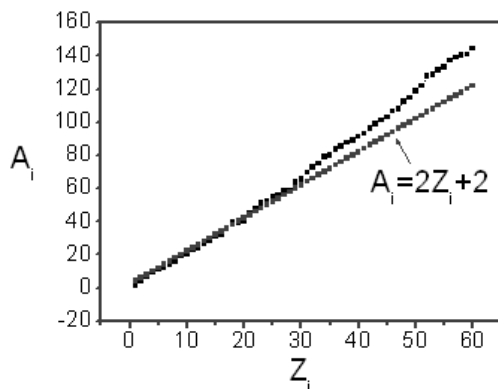


Рис. 9. Зависимость атомного веса от заряда.

Интересны частные случаи для смеси. Для полностью нейтрального газа имеем в смеси, соответствующей солнечному содержанию элементов формула будет такая:

$$n_i = 1, \left\langle \frac{1}{A_i} \right\rangle \approx \frac{1}{15.5}, \mu^{-1} = X + Y/4 + Z/15.5.$$

Для полностью ионизованного газа, у которого $n_H=2, n_{He}=3, n_i=Z_i+1$, имеем следующие соотношения:

$$A_i \approx 2Z_i + 2 \Rightarrow \left\langle \frac{n_i}{A_i} \right\rangle = \left\langle \frac{6 + Z_i}{2Z_i + 2} \right\rangle \approx 0.5,$$

$$\mu^{-1} = 2X + 0.75Y + 0.5Z.$$

Студенту полезно проверить цифры, приведенные ниже.

Случай 1- чисто водородная плазма:

$\mu=1$, если водород нейтральный;

$\mu=0.5$ если водород ионизован.

Случай 2 – смесь водорода и гелия (90% водорода, 10% - гелия по числу атомов):

$\mu=1.3$, если оба элемента в нейтральном состоянии;

$\mu=0.65$, если водород ионизован, гелий находится в состоянии HeII;

$\mu=0.62$, если водород и гелий полностью ионизованы;

Случай 3 – гелиевая плазма:

$\mu=4$, если гелий нейтральный;

$\mu=2$, если гелий однажды ионизован;

$\mu=1.3$, если гелий полностью ионизован.

Законы излучения Кирхгофа

В 1859 году Густав Кирхоф экспериментально изучал виды спектров излучения разных веществ при разных условиях. В итоге он пришел к формулировке в виде трех законов (точнее экспериментальных фактов):

1 закон: *нагретое твердое и жидкое тело или газ при достаточно больших давлениях излучают во всех длинах волн и производят непрерывное излучение.*

2 закон: *разреженный горячий газ дает излучение в определенных спектральных линиях.*

3 закон: *холодный газ, расположенный перед горячим телом, поглощает излучение в определенных линиях, наложенных на непрерывный спектр.*

В частности, в звездных атмосферах действие этих трех законов приводит к образованию сложных спектров звезд с наличием разных компонентов (см. рис. 10). Открытие этих трех законов, по сути дела, и заложило основы наблюдательной астрофизики.

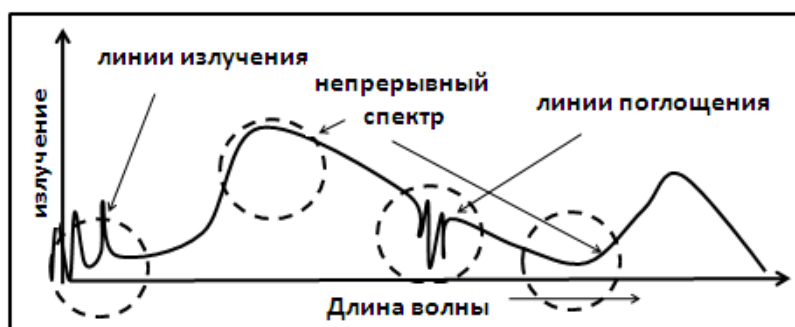


Рис. 10 Схематичный спектр звезды.

Полное термодинамическое равновесие

Из термодинамики известно, что любая изолированная система с объемом V , с числом частиц в этом объеме N и энергией E в итоге стремится к состоянию термодинамического равновесия (ПТР). На данном этапе изложения мы не будем вдаваться в вопрос о выполнении предположения о таком равновесии в 3А. Этот вопрос подробно будет затронут несколько ниже. Здесь лишь приведем основные соотношения, следующие из этого предположения о ПТР.

Распределение Больцмана. Для начала следует вспомнить некоторые сведения о строении атома. В конце 19 и начале 20 века физики обнаружили, что стандартные законы физики (законы механики и др.) не работают на малых атомных размерах. В частности, классическая физика не могла объяснить поведение фотонов, нейтронов, электронов и атомов. Выход был найден Нильсом Бором, который предложил планетарную модель атома. В дальнейшем квантовая механика улучшила эту модель (были введены спины, облачная структура электрона и др.). С использованием модели Бора, описанную в Дополнении-5, напомним терминологию, используемую ниже. Для удобства будем использовать диаграмму Гротриана, реализующую модель атома Бора (рис.11).

Атомы конкретных элементов могут находиться на разных энергетических уровнях. Другими словами, на каждом уровне может находиться разное число (населенность N_i) атомов.

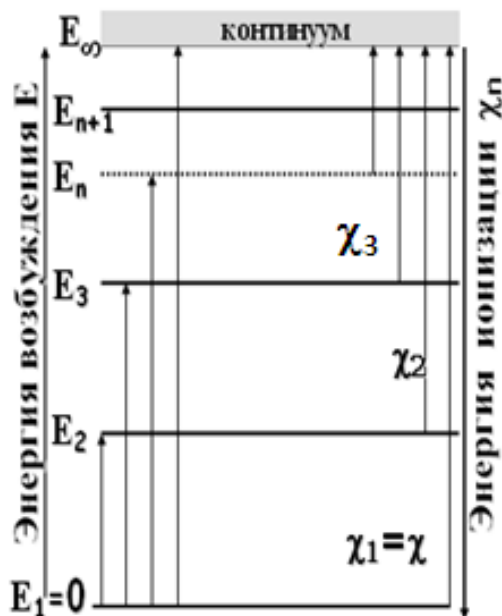


Рис. 11. Диаграмма Гротриана:

E_1, E_2, \dots - энергии возбуждения уровней,
 χ_1, χ_2, \dots - энергии ионизации с уровней,
 $\chi_1 = \chi = E_\infty$ - энергия ионизации с основного (первого) уровня,
 $E_\infty = E_n + \chi_n$.

Для многих задач астрофизики необходимо знать, каково распределение частиц по энергетическим состояниям. В Дополнении-6 показано, что распределение частиц в равновесной среде следует соотношению с фактором Больцмана:

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}}, \quad \frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{u} e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad u =$$

Здесь N_i есть число атомов на уровне i , g_i – статистический вес уровня, E_i – энергия возбуждения уровня. Несколько подробнее обсудим так называемую "сумму по состояниям" (partition function) u .

Формально говоря, сумма по состояниям является расходящейся. Например, для водорода имеем:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} 2i^2 e^{-\frac{13.6(1-1/i^2)}{kT}} = 2e^{-\frac{13.6}{kT}} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{\frac{1}{i^2 kT}}.$$

Здесь для водорода $g_i=2i^2$, 13.6 эв – потенциал ионизации водорода. Но с физической точки зрения сумма по состояниям является фиксированной. Простой качественный аргумент в пользу этого утверждения такой. Когда две частицы проходят друг около друга, то электрический потенциал между ними станет несколько меньше, чем в случае их изоляции. Это приводит к незначительному понижению теоретического потенциала ионизации отдельной частицы. Это понижение потенциала ионизации означает обрезание суммы по состояниям на определенном верхнем уровне i_{\max} .

Для количественной оценки имеется несколько подходов, при которых суммирование ограничивается верхним значением номера уровня i_{\max} .

1) самый верхний уровень имеет орбиту с радиусом, не большим значения среднего расстояния между частицами;

2) самый верхний уровень имеет орбиту с радиусом, не большим значения радиуса Дибая (радиус Дибая это расстояние, на которое еще простирается кулоновское воздействие заряженной частицы в плазме).

3) самый верхний уровень это тот, выше которого эффект Штарка размывает энергетические состояния.

Рассмотрим только первый вариант. Атом находится в окружении других атомов, среднее расстояние между которыми равно r_0 . Поэтому радиус последней орбиты электрона не может быть больше r_0 :

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 N = 1 \Rightarrow r_0 = \frac{1}{(\frac{4}{3}\pi N)^{1/3}}$$

$$r = a_0 i^2 = 0.53 \times 10^{-8} i^2, \quad \Rightarrow \quad i_{\max} = \frac{1}{(\frac{4}{3}\pi N)^{1/6} a_0^{1/2}}$$

Например, для водорода будем иметь:

$$N \sim 10^{12} \Rightarrow i_{\max} = 100, \quad N \sim 10^{15} \Rightarrow i_{\max} = 32,$$

$$N \sim 10^{18} \Rightarrow i_{\max} = 10.$$

Полезное замечание: при температурах $<10\,000\text{ К}$ можно с хорошей точностью использовать простое соотношение: $u=g_1$.

Помимо распределения Больцмана в физике имеют место и другие распределения: Ферми - Дирака, Бозе - Эйнштейна. Но эти распределения важны для очень высоких давлений и температур, не реализуемых в звездных атмосферах.

Распределение атомов по степеням ионизации. В результате фото или ударной ионизации происходит ионизация атомов, которые в плазме могут оказаться в разных степенях ионизации. Эффективность этих процессов зависит, конечно, от интенсивности поля излучения и значения кинетической энергии ударяющих частиц (обычно электронов). Поэтому необходимо знать, каково распределение этих атомов по степеням ионизации. Такое распределение было получено Саха. Вариантов вывода формулы Саха имеется несколько. В Дополнении-7 мы приводим один из них. Формула Саха для двух соседних степеней ионизации $j+1$ и j приведена ниже:

$$\frac{N_{j+1}N_e}{N_j} = \frac{2u_{j+1}}{u_j} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}.$$

Следует отметить, что потенциалы ионизации конкретного атома сильно различаются между собой, поэтому эти атомы находятся преимущественно в двух-трех соседних степенях ионизации. Это хорошо видно из ниже приведенного рисунка 12.

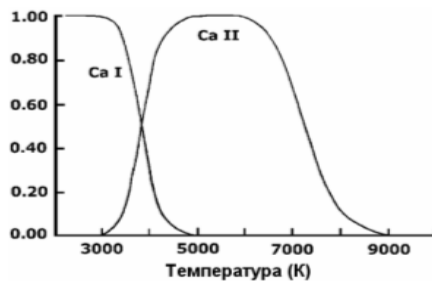


Рис. 12. Атомы кальция в различных степенях ионизации в зависимости от температуры.

Формула Саха описывает степень ионизации для относительно слабо ионизованной плазмы, для которой радиус Дебая велик. Приближенное значение для него таково:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{e^2 N_e}}.$$

При $T=10\,000\text{ К}$ и $N_e=10^{12}$ число частиц в сфере радиуса Дебая велико:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{e^2 N_e}} = 2 \cdot 410^{-3} \text{ см}, \quad N_D = N_e \left(\frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \right) \sim 1000.$$

Поэтому высказанное ограничение на использование формулы Саха в теории ЗА не выполняется.

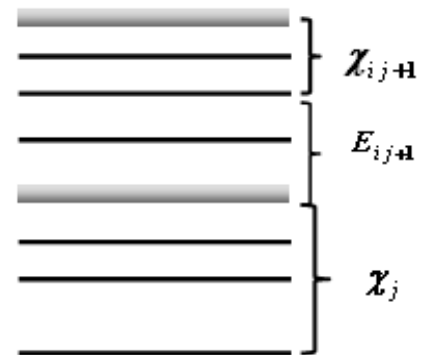
В астрофизических исследованиях (например, при определении коэффициентов поглощения) часто используется комбинированная формула Больцмана - Саха, задающая число атомов на определенном уровне i с учетом ионизации. В последующих формулах первый индекс означает номер уровня, а второй – степень ионизации:

$$\frac{N_{1j+1}N_e}{N_{1j}} = 2 \frac{g_{1j+1}}{g_{1j}} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}},$$

$$N_{1j} = N_{1j+1}N_e \frac{g_{1j}}{g_{1j+1}} \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{\frac{\chi_i}{kT}},$$

$$\frac{N_{ij}}{N_{1j}} = \frac{g_{ij}}{g_{1j}} e^{-\frac{E_{ij}}{kT}},$$

$$N_i^{LTE} \equiv N_{ij} = N_{1j+1}N_e \frac{g_{ij}}{g_{1j+1}} \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{\frac{\chi_{ij} - E_{ij}}{kT}}.$$



Последняя формула является искомой. Эта формула ценна тем, что она не содержит суммы по состояниям.

Распределение частиц по скоростям. При рассмотрении этого вопроса ещё в XIX веке Дж. Максвелл утверждал, что молекулы, беспорядочно сталкиваясь друг с другом, имеют определенное распределение по скоростям. Это распределение оказывается однозначным и единственно возможным. Статистическая физика позволяет установить такое соотношение, которое имеет следующий вид:

$$\frac{N(V) dV}{N_{\text{полн}}} = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi k T} \right)^{3/2} V^2 e^{-\left(\frac{MV^2}{2kT} \right)} dV,$$

$$\frac{N(V) dV}{N_{\text{полн}}} = f(V) dV, \quad \int_0^{\infty} f(V) dV = 1.$$

Здесь $N(V)$ есть число частиц, пространственные скорости V которых лежат в интервале $(V, V+dV)$. $N_{\text{полн}}$ есть полное число частиц в 1 см^3 . Один из вариантов вывода этих двух формул можно найти в Дополнении.

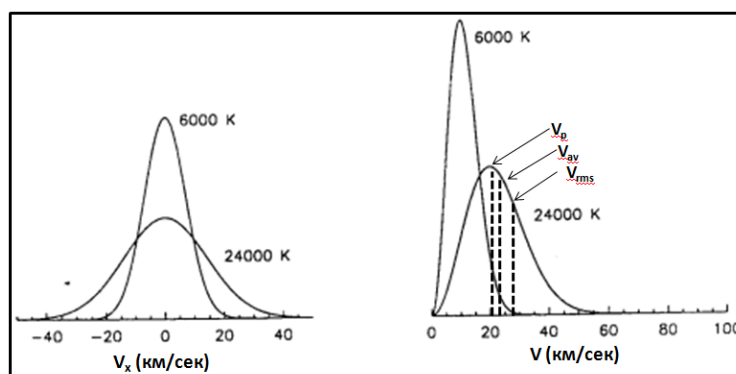


Рис. 13. Слева: распределение Максвелла при фиксированной температуре для проекции скоростей на ось x . Справа: распределение для модулей пространственных скоростей.

Характерные скорости в распределении такие (см. также рис. 13):

1. Наиболее вероятная скорость V_p , определяемая как

$$\frac{d}{dV} f(V) = 0 \Rightarrow V_p = \sqrt{\frac{2kT}{M}}.$$

2. Средняя скорость V_{av} , определяемая как

$$V_{av} = \int_0^{\infty} V f(V) dV = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}}.$$

3. Среднеквадратичная скорость V_{rms} , определяемая как

$$V_{rms} = \sqrt{\int_0^{\infty} V^2 f(V) dV} = \sqrt{\frac{3kT}{M}}.$$

Студенту рекомендуем получить эти формулы, используя при интегрировании следующие выражения:

$$I(n) = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx, \quad I(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad I(1) = \frac{1}{2a},$$

$$I(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}, \quad I(3) = \frac{1}{2a^2}, \quad I(4) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}, \quad I(5) = \frac{1}{a^3}.$$

Вышеприведенное распределение Максвелла было записано для пространственных скоростей. Но совершенно очевидно, что из-за хаотичности движений это распределение справедливо и для выбранного в пространстве направления, например, для проекций на луч зрения. Это распределение выглядит следующим образом (см. Дополнение-8):

$$f(V_x) = \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{MV_x^2}{2kT}} .$$

Основные процессы в плазме с полем излучения

Как было определено выше, звездная атмосфера это плазма, находящаяся в поле излучения. Между компонентами плазмы происходят разные процессы, которые кратко опишем ниже. Введем следующие обозначения:

A_i^Z : A - обозначение какого либо атома или иона, Z - заряд иона ($Z=0$ - нейтральный атом, $Z=1$ - однажды ионизованный атом и т. д.), i - энергетический уровень состояния атома или иона.

1) Фотовозбуждение: $A_i^Z + h\nu \rightarrow A_j^Z$ ($i < j$) - поглощение фотона, переход атома в более возбужденного состояние с энергией $E_j > E_i$.

2) Фотодевозбуждение (спонтанный переход вниз): $A_j^Z \rightarrow A_i^Z + h\nu$ ($j > i$) - переход на более нижний уровень с излучением.

3) Фотодевозбуждение (вынужденный переход вниз): $A_j^Z + h\nu \rightarrow A_i^Z + h\nu + h\nu$ ($j > i$) - переход под влиянием падающего излучения на более нижний уровень с появлением второго кванта.

4) Фотоионизация: $A_i^{Z+1} + h\nu \rightarrow A_j^{Z+1} + e$: поглощение кванта с энергией, большей чем энергия ионизации χ_i уровня i с последующим выделением свободного электрона e . Атом (или ион) становится со степенью ионизации на единицу больше. При очень больших энергия падающих на атом (ион) квантов может выделяться несколько электронов (ионизация Оже).

5) Фоторекомбинация: $A_j^{Z+1} + e \rightarrow A_i^Z + h\nu$: обратный процесс предыдущему - захват ионом свободного электрона с выделением кванта. Этот процесс происходит без участия поля излучения.

6) Фоторекомбинация (вынужденная): $A_j^{Z+1} + e + h\nu \rightarrow A_i^Z + h\nu + h\nu$ - процесс, аналогичный предыдущему, но под влиянием внешнего поля излучения.

Последующие процессы происходят при участии ударяющей частицы. Обычно учитываются удары электронами, так как их скорость больше скорости ионов или атомов.

7) Ударное возбуждение: $A_i^Z + e_1 \rightarrow A_j^Z + e_2$ ($i < j$) - часть энергии $E(e_1)$ ударяющего электрона уходит на возбуждение атома. Энергия электрона после удара будет меньше ($E(e_2) < E(e_1)$).

8) Ударное девозбуждение: $A_j^Z + e_1 \rightarrow A_i^Z + e_2$ ($j > i$) - ударяющий электрон забирает энергию возбуждения ($E(e_2) > E(e_1)$).

9) Ударная ионизация: $A_i^Z + e_1 \rightarrow A_j^{Z+1} + e_2 + e_3$ – ударяющий электрон e_1 выбивает связанный с атомом электрон e_3 , которому сообщается энергия $E(e_3)$. Ударяющий электрон при этом будет иметь уже меньшую энергию ($E(e_2) < E(e_1)$).

10) Ударная рекомбинация: $A_j^{Z+1} + e_1 + e_2 \rightarrow A_i^Z + e_2 + e_3$ – свободный электрон e_1 рекомбинирует с ионом, при этом должна выделяться энергия излучения. Но если имеет место соударение и с другим электроном e_3 , то он может забрать эту энергию. Поэтому такая рекомбинация называется тройной. Энергии двух электронов разные.

Среди других процессов, играющих роль в звездных атмосферах, следует отметить дизлектронную рекомбинацию и автоионизацию. О них речь будет идти в Пособии -3.

Основные предположения в теории звездных атмосфер

1) Фундаментальным предположением в классической теории является предположение о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР). Другими словами, ионизация и возбуждение описываются формулами Саха и Больцмана, распределение частиц по скоростям – максвелловское. Все эти формулы должны быть справедливыми для конкретной точки атмосферы. Это предположение, обсужденное в 1928 году А. Милном, является априорным и требующим обоснования. Критика ЛТР-подхода и реализация другого подхода будет приведена в Пособии-3.

Тем не менее, это ЛТР приближение использовалось в течение почти 80 лет. Исследования последних трех десятилетий показали, что хотя бы использование формул Саха и Больцмана должно быть заменено более строгим подходом. Этот подход условно называется не-ЛТР подходом (см. исследования казанской группы астрофизиков, часть из них приведена в Пособии-3).

2) Гидростатическое равновесие: силы газового и лучистого давления равны силам гравитационного давления (рис. 14). Другими словами:

- а) не имеется динамически значимых потерь массы;
- б) в атмосфере не имеется других значимых ускорений, сравнимых с гравитационным;
- в) не имеется пульсаций или движений большого масштаба.

Таким образом, классическая теория звездных атмосфер (которая и излагается в рамках этого курса) применима к «обычным» стационарным звездам.

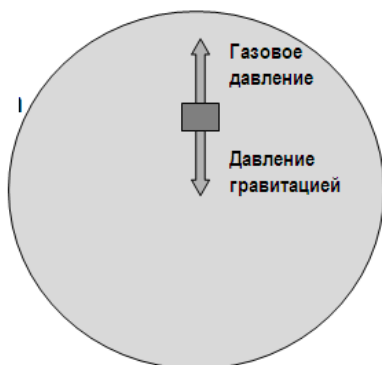


Рис. 14 Гидростатическое равновесие

В общем случае уравнение гидростатического равновесия имеет вид:

$$\frac{dP_{\text{полн}}}{dx} = -g\rho.$$

Полное давление включает:

- газовое давление $P_{\text{gas}} = NkT$,
- давление излучения $P_{\text{rad}} = \int g_{\text{rad}}(x) p dx$.
- давление микротурбулентцией $P_{\text{turb}} = \frac{1}{2} \rho (V_{\text{micro}})^2$,
- конвективное давление P_{conv} ,
- давление, вызванное вращением звезды $P_{\text{rot}} = \int \rho (V_{\text{rot}})^2 dx / R$,
- давление макротурбулентцией P_{macro} ,
- магнитное давление P_{mag} .

В реальности при расчетах моделей атмосфер учитываются только первые 4 компоненты давления.

Часто в качестве меры глубины берут "массу", определяемую как ρdx . Тогда в простейшем случае $P = gm + \text{const}$.

3) Плоскопараллельная структура слоев. Такая структура слоев хорошо выполняется, если отношение толщины атмосферы к радиусу звезды намного меньше 1. На примере Солнца:

$$\frac{\Delta R_{\text{атм}}}{R_{\text{Солн}}} = \frac{200 \text{ км}}{700000 \text{ км}} \ll 1.$$

Рассмотрение плоских слоев сводится к единственному преимуществу (см. рис. 15). Как видно из рисунков, при плоскопараллельной структуре решение проблемы переноса излучения сильно упрощается: излучение зависит только от одной величины-глубины, а угол θ постоянен. В случае же сферической геометрии оно зависит уже от двух величин: глубины и угла наклона движения квантов к нормали, который переменен.

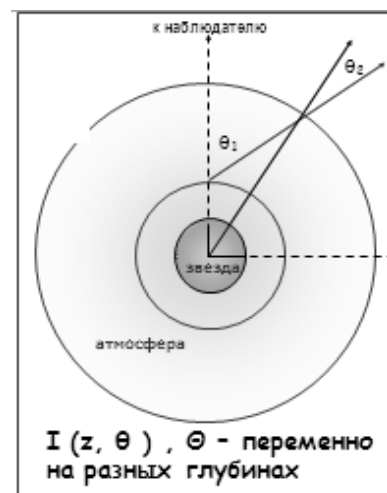
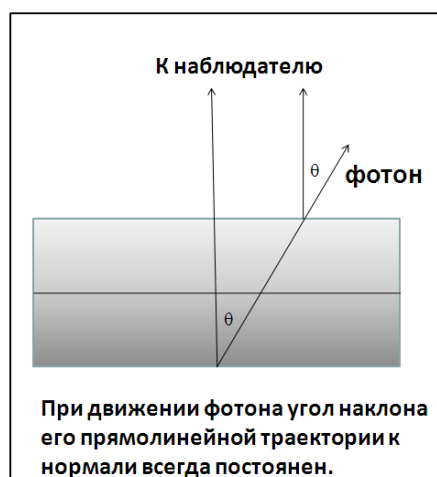


Рис. 15. Справа: плоскопараллельная структура 3А. Справа: сферическая структура 3А.

4) Азимутальная симметрия. Согласно этому предположению исходящее от диска звезды излучение не зависит от угла φ при фиксированном расстоянии от центра диска (рис. 16). При таком предположении мы фактически игнорируем возможные проявления гранул и пятен на поверхности звезды.

4) Предполагается, также, что не имеется градиента по глубине и по поверхности в химическом содержании элементов. Считается, что такая химическая однородность реализуется в результате перемешивания вещества в 3А. Исключение составляют магнитные и пекулярные А-звезды.

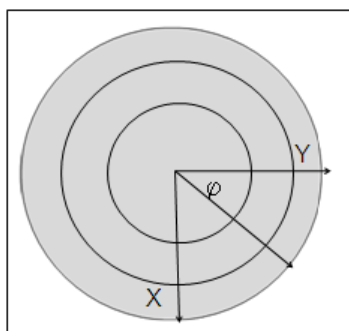


Рис. 16. Азимутальная симметрия: характеристики излучения, исходящего с поверхности при одних и тех же значениях X и Y , одинаковы.

5) Дополнительное положение. Источниками энергии звезд являются термоядерные реакции в центре звезды. Выработанное излучение в течение долгого времени, поглощаясь, переизлучаясь и рассеиваясь, проходит внутренние слои звезды и попадает в атмосферу. В этих слоях уже нет никаких источников выработки энергии, так же как и нет механизмов стока энергии.

Механизмы переноса энергии в звездных атмосферах

Возможные механизмы переноса энергии, известные физике перечислены ниже.

- Теплопроводность – ниже покажем, что этот процесс не играет роли в звездных атмосферах. Для Солнца этот механизм переноса энергии составляет лишь 10^{-5} часть от лучистого потока.
- Перенос энергии излучением – самый важный механизм в звездных атмосферах.
- Конвекция – наиболее важна в атмосферах поздних звезд. Но для Солнца ее поток энергии составляет лишь 1% от лучистого потока.
- Производство тепла – за счет диссипации акустических и гидродинамических волн (в хромосфере и в переходной зоне Солнца между хромосферой и короной). Для звездных атмосфер этот механизм не играет роли.
- Истечение вещества (звездный ветер) под влиянием давления излучения – важно для горячих звезд.
- Перенос энергии нейтрино – не играет роли в звездных атмосферах.

Рассмотрим некоторые механизмы более подробно.

Теплопроводность.

Этот механизм реализуется при передаче энергии из горячих областей в холодные за счет обмена энергией между частицами при столкновениях при их хаотическом движении. Эксперименты с газами, жидкостями и твердыми телами показали, что поток передаваемой теплопроводностью энергии пропорционален градиенту температуры:

$$F = -KV\Delta T.$$

Оценим величину коэффициента K из простых соображений. Обозначим через $\varepsilon(x)$ среднюю энергию одной частицы в точке x . Средняя скорость движения частицы равна V . При хаотическом движении примерно $(1/6)NV$ частиц движется через единичную площадку в одном из 6 направлений: $\pm x, \pm y, \pm z$ (см. рис. 17).

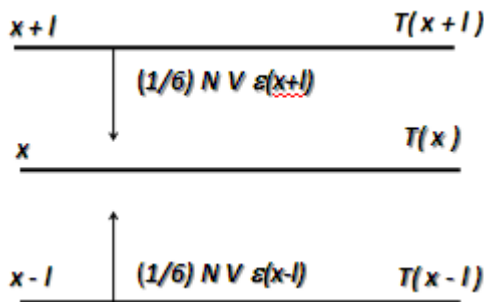


Рис. 17. Перемещение частиц вдоль оси X при хаотическом движении.

Рассмотрим 3 единичные площадки вдоль одной оси, разделенные друг от друга расстоянием l - длиной свободного пробега частицы. Допустим, что частица, двигающаяся снизу, на расстоянии l испытывает соударение и передает свою энергию другой частице. Тогда полный поток энергии в направлении $\pm x$ будет равен

$$F_{term} = \frac{1}{6}NV[\varepsilon(x-l) - \varepsilon(x+l)] = \frac{1}{6}NV\left[-2l\frac{d\varepsilon}{dx}\right] = -\frac{1}{3}NVl\frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Это означает, что

$$F_{term} = -K\frac{dT}{dx}, \quad K = \frac{1}{3}NVlC, \quad C = \frac{d\varepsilon}{dT}.$$

Здесь C - удельная теплоемкость.

Для частного случая одноатомного нейтрального газа мы можем положить, что

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT.$$

Тогда $C = (3/2)k$, k - постоянная Больцмана.

Средний путь свободного пробега l частицы оценим из следующих соображений. Обозначим путь до соударения через L , радиус частицы через R и концентрацию ча-

$$l \approx \frac{L}{4\pi R^2 N} \approx \frac{1}{N\sigma} = \frac{1}{\sigma N}.$$

стиц 1 см^3 через N . Тогда объем столкновения будет $\pi R^2 L$, а число столкновений в этом объеме будет $\pi R^2 L N$. Тогда среднее расстояние между столкновениями будет равно

Величина σ называется сечением соударения. Применим эту формулу для нейтральных водородных атомов. Тогда

$$l \approx \frac{1}{N\sigma} \approx \frac{1}{N\pi a_0^2}.$$

Здесь a_0 - радиус первой боровской орбиты. За скорость V возьмем среднеквадратичную скорость

$$V_{rms} = \sqrt{3kT/M}.$$

В итоге имеем:

$$F_{term} = -\frac{1}{2} \frac{k^{3/2}}{\pi a_0^2} \sqrt{\frac{3T}{M}} \frac{dT}{dx} \quad (\text{эрг см}^{-2} \text{сек}^{-1}). \quad (1)$$

Перенос энергии излучением

Формула (1) может быть использована и для определения потока излучения. Перепишем формулу в несколько измененной форме и определим новый смысл входящих в нее величин:

$$F_{rad} = -\frac{1}{3} N V l \frac{d\varepsilon}{dT} \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{3} \left(N \frac{d\varepsilon}{dT} \right) V l \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{3} \left(\frac{dN\varepsilon}{dT} \right) V l \frac{dT}{dx}.$$

Величина $N\varepsilon$ применительно к рассматриваемому случаю есть плотность излучения u . Она для абсолютно черного тела равна

$$\left(\frac{4\sigma}{c} \right) T^4 = a T^4.$$

(σ есть постоянная Стефана Больцмана). Таким образом,

$$\left(\frac{dN\varepsilon}{dT} \right) = 4a T^3.$$

Величина V есть скорость света c . Ниже мы покажем, что длина свободного пробега для фотонов l равна

$$l = 1/\bar{\alpha}.$$

Здесь α есть средний коэффициент поглощения. В итоге для потока излучения имеем

$$F_{rad} = -\frac{1}{3} \left(\frac{du}{dT} \right) \frac{c}{\bar{\alpha}} \frac{dT}{dx} = -\frac{4}{3} \frac{aT^3 c}{\bar{\alpha}} \frac{dT}{dx}. \quad (2)$$

С использованием формул (1) и (2) можно получить отношение двух потоков:

$$F_{rad} / F_{term} = \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{ac}{\bar{\alpha}} \frac{T^{5/2} \sqrt{M}}{k^{3/2}} \approx 3 * 10^{22} \frac{T^{5/2}}{\bar{\alpha}}.$$

Мы приходим к заключению, что механизм переноса энергии излучением существенно эффективней механизма теплопроводности.

Конвекция.

В ядре звезды вырабатывается энергия в результате термоядерных реакций. Затем эта энергия переносится наружу. Если скорость передачи этой лучистой энергии мала, то передающая среда начинает «кипеть». Другими словами, включается другой механизм передачи энергии - «конвекция». Конвекция возникает, так как теплая среда расширяется и становится менее плотной, чем окружающая более холодная область.

Рассмотрим атмосферу, у которой давление уменьшается по мере продвижения к поверхности (рис. 17). Допустим, что элемент газа медленно (т.е. со скоростью, меньшей скорости звука) движется вверх адиабатически (т.е. без обмена энергией с окружающей средой) и проходит путь Δx . При этом плотность элемента вещества по мере движения уменьшается на величину $(d\rho/dx)_{эл} \Delta x$ и достигает значения ρ_i . Плотность окружающей среды также уменьшается на величину $(d\rho/dx)_{окр} \Delta x$ и приобретает значение ρ_a . Через расстояние Δx наш элемент по отношению к плотности окружающей среды изменит плотность на величину

$$\Delta\rho = \left[\left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{эл} - \left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{окр} \right] \Delta x.$$

Далее возможны два случая:

- $\Delta\rho < 0$ - элемент продолжает подниматься, вызывая неустойчивость среды, при этом элемент может являться достаточно эффективным механизмом переноса энергии;
- $\Delta\rho > 0$ - плотность элемента оказывается выше плотности окружающей среды, под влиянием гравитации элемент стремится вернуться в прежнее положение, устанавливается стабильность среды.

Итак, стабильность будет осуществляться, если

$$\left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{эл} > \left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{окр}.$$

Уточним градиенты плотности. Поскольку элемент газа двигается адиабатически, то градиент его плотности будет адиабатическим, т.е.

$$\left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{эл} = \left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{ад}.$$

Поскольку окружающая среда находится в лучистом равновесии (об этом см. текст ниже), то градиент плотности среды будет таким:

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{окр} \Rightarrow \left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{rad}.$$

Тогда условие стабильности будет таким:

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{ad} > \left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{rad}, \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_{ad} > \left(\frac{dT}{dx}\right)_{rad}.$$

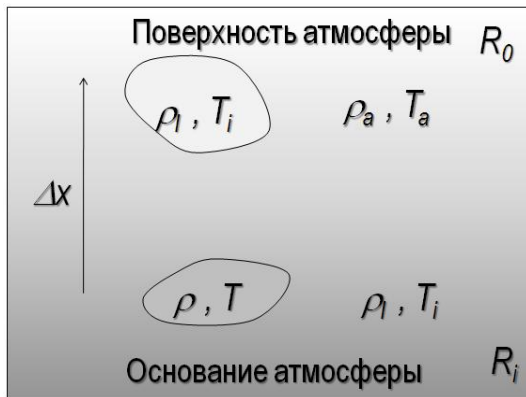


Рис. 17. Движение элемента газа в окружающей среде 3А

Вторая запись следует из того, что

$$P_{ad} \propto \rho_{ad} T_{ad}, \quad P_{rad} \propto \rho_{rad} T_{rad}.$$

Если использовать условие гидростатического равновесия в виде

$$dP_{gas} = -g\rho(x)dx = (k / m_H \mu)\rho T.$$

(напомним, что m_H – масса атома водорода, μ – средний молекулярный вес), то

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dx} = \frac{dT}{dP} g\rho = \frac{dT}{dP} g \frac{m_H \mu}{kT} P = g \frac{m_H \mu}{k} \frac{d \ln T}{d \ln P}.$$

Стабильность будет сохраняться, если будет выполняться следующий критерий:

$$\left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} > \left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{rad}. \quad (3)$$

Итак: неустойчивость (конвекция) возникает тогда, когда градиент температуры в звездной атмосфере меньше адиабатического градиента. Это условие называется критерием Швацшильда.

Теперь определим адиабатический градиент, используя молекулярную теорию газа, из которой следует следующее соотношение:

$$P \sim \rho^\gamma, \quad \gamma = C_p / C_v.$$

Здесь C_p и C_v есть теплоемкости при постоянном давлении или при постоянном объеме. Для идеального одноатомного полностью ионизованного или полностью нейтрального газа $\gamma = 5/3$.

Имея соотношения $P = \rho k T / \mu$ и $P^{\gamma-1} \sim T^\gamma$, в итоге имеем

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} = 0.4.$$

Изменение степени ионизации будет изменять адиабатический градиент. Для чисто водородной плазмы было установлено, что

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{ad} = \frac{2 + X(1-X)\left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_{ion}}{kT}\right)}{5 + X(1-X)\left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_{ion}}{kT}\right)^2}, \quad X = \frac{N_e}{N_p + N_H}.$$

Здесь χ_{ion} есть потенциал ионизации атома. Частные случаи такие:

- горячие звезды - ионизованный газ: $X=1, \gamma=0$;
- холодные звезды ($T < 10\,000\text{ K}$): $X=0.5, \gamma=0.7$.

Теперь перейдем к лучистому градиенту. Ниже мы покажем, что распределение температуры в атмосферах звезд зависит от оптической глубины τ по следующему закону:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \Rightarrow \frac{dT}{dP} = \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}}{4T^3} T_{eff}^4,$$

Тогда искомый градиент будет определяться как

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{rad} = \frac{k}{g \mu m_H} \frac{\bar{\alpha}}{4T^3} \frac{3}{4} T_{eff}^4 = \frac{3}{16} \left(\frac{T_{eff}}{T} \right)^4 \bar{\alpha} H \approx \frac{3}{16} \frac{\pi}{\sigma g \rho T^4} \bar{\alpha} F.$$

Итак, лучистый градиент определяется значением среднего коэффициента поглощения α . Когда непрозрачность α велика, то температурный градиент становится крутым (т.е. непрозрачность настолько велика, что перенос энергии излучением становится неэффективным).

В заключение мы имеем критерий стабильности (3) в таком виде:

$$\frac{2 + X(1 - X)\left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_{ion}}{kT}\right)}{5 + X(1 - X)\left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_{ion}}{kT}\right)^2} > \frac{k}{g\mu m_H} \frac{\alpha}{4T^3} \frac{3}{4} T_{eff}^4.$$

Первый член определяется значением γ , а второй значением α .

При рассмотрении выше мы учитывали ионизацию чистоводородной плазмы. Поэтому рассмотрение применимо для водородной конвективной зоны Солнца. При более низких температурах надо учитывать другие (молекулярные) состояния водорода. Это приводит к тому, что конвекция может охватить всю атмосферу звезды.

Применительно к реальным объектам исследования показали, что роль конвекции будет такой.

- 1) F – звезды являются более холодными и имеют конвекцию на поверхности.
- 2) Поверхностные конвективные зоны становятся более протяженными в более поздних классах, в холодных M-карликах атмосфера становится полностью конвективной.
- 3) Конвективные зоны на поверхности приводят к образованию хромосфер, и акустический или магнитный перенос может играть роль в переносе энергии выше температурного минимума.
- 4) Конвекция не присутствует для звезд с $T_{eff} > 9000$ К.
- 5) Для A-звезд тонкая (100- 200 км) конвективная зона присутствует. Она лежит глубже области образования видимого спектра.
- 6) Звезды гиганты менее предпочтительны к образованию конвекции по сравнению со звездами карликами из-за малой плотности атмосферы: конвекция является не эффективной.
- 7) Конвекция важна во внутренних слоях звезд (см. рис. 18).

Вопрос для проверки. На рис. 19 дано поведение двух градиентов температур. Является ли атмосфера конвективно устойчивой?

Теперь необходимо сформулировать математический метод вычисления потока, переносимого конвекцией. Но это очень сложная проблема. Некоторым приближением в этой теории является так называемая теория длины перемешивания (ТДП). Она была предложена в 1950'ых годах Э. Бем-Витенсе и др. и до сих пор является используемой. Ее физическая суть основана на следующих суждениях.

- Если «всплывающий» элемент имеет избыток тепловой энергии, то через характерное расстояние L он рассеивается в окружающей среде, отдавая ей свою избыточную энергию.

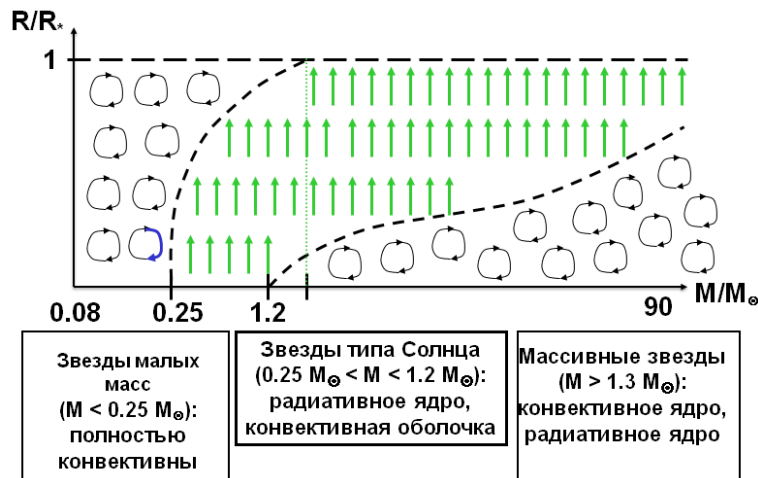


Рис. 18. Конвекция у звезд разных масс.

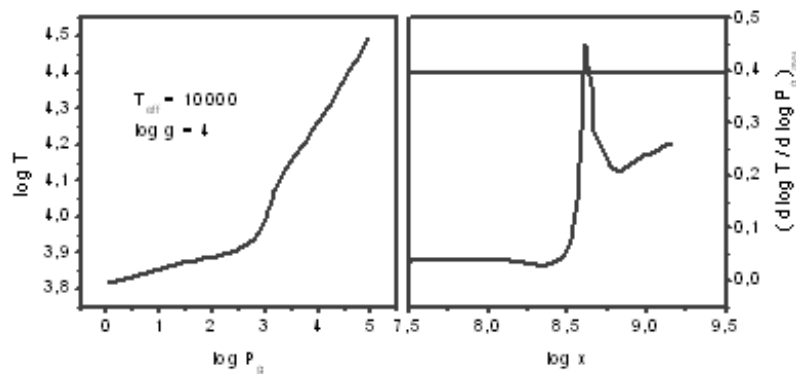


Рис. 19. Лучистый градиент в ЗА.

- Если элемент имеет нехватку энергии, то через расстояние L он поглощает энергию и снова поднимается вверх.

В итоге температурный градиент в среде будет меньше, чем при переносе энергии только излучением. Значение L до сих пор является предметом научных дискуссий. L есть расстояние, проходимое конвективной ячейкой до момента рассеивания в окружающей среде. Обычно L выражают в единицах H :

$$\alpha = \frac{L}{H}, H = \frac{kT}{\mu g}.$$

Здесь H есть характерное расстояние, равное расстоянию, при котором давление падает в e раз. Если конвекции нет, то $\alpha = 0$. Когда конвекция есть, предполагается, что α порядка 1.5, но иногда предполагаются величины от нуля до 2-3. Гелиосейсмология дает величину $\alpha = 1.8473 \pm 0.002$.

Альтернативный подход был предложен Ганутто и Мазителли в 1991-1992 годах. В методе рассматриваются ячейки разного размера и разные длины их пробега перед рассеиванием с окружающей средой. Эти ячейки могут проникать и в стабильные верхние слои атмосферы (это называется “overshooting”). Достоинством метода явля-

ется то, что он не требует никаких дополнительных параметров. Метод был внедрен в широко известную программу расчетов моделей атмосфер ATLAS9 (Курка Ф., 1996, ASP 44, 356). Обнаружилось позднее, что для моделей атмосфер с температурами $T_{eff} > 9000$ К два подхода дают одинаковый результат.

Последние достижения в этой области связаны с развитием численных методов при гидродинамических вычислениях для учета конвекции в двумерных (2D) и трехмерных (3D) – пространствах. Об этом будет идти речь в конце Пособия.

В тех случаях, когда конвекция важна, необходимо оценить ее вклад в общий поток энергии. Это делается следующим образом. Конвективная ячейка,двигающаяся со скоростью V , переносит энергию, равную

$$F_{conv} = \text{поток массы} \times \text{тепловая энергия на 1 грамм} = \rho V dQ = \rho V C_p \Delta T.$$

Теория длины перемешивания дает следующий результат (без вывода):

$$F_{conv} = \rho C_p \alpha^2 T \left[gH \left| 1 - \frac{d \ln \mu}{d \ln T} \right| \right]^{1/2} \left[\left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{rad} - \left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} \right]^{3/2}.$$

Сравнение конвективного и лучистого потоков можно сделать по следующим оценочным формулам:

$$F_{conv} \sim T^{1.5}, \quad F_{rad} \sim T_{eff}^4, \quad F_{rad} / F_{conv} \sim T^{2.5}.$$

Из этого опять следует вывод, что роль конвекции в переносе энергии важна для холодных звезд. Для горячих звезд она не существенна.

Общий поток энергии равен $F = F_{rad} + F_{conv}$. Этот поток должен равняться $F = \sigma T_{eff}^4$. Если модели атмосфер для определенной T_{eff} были вычислены без учета конвекции, то они должны быть перевычислены с включением конвекции (если она важна). Это даст новую модель с иным поведением физических величин с глубиной. Схема расчетов приведена ниже.

1) Для начала предполагается первоначальное распределение температуры по глубине $T(x)$.

2) С полученной моделью вычисляется конвективный поток F_{conv} .

3) Далее делается проверка на постоянство потока

$$F_{rad}(x) = \sigma T_{eff}^4 - F_{conv}(x).$$

4) Вычисление новой температурной стратификации с учетом, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} > \left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{rad}.$$

5) Возвращение к шагу 2 (при необходимости).

Перенос энергии нейтрино

На поздних стадиях эволюции массивных звезд перенос энергии с помощью нейтрино может даже быть более эффективным, чем другие механизмы. Именно таким способом происходит охлаждение звезд на последних стадиях эволюции и во вспышках Сверхновых.

Нейтрино возникает при ядерных реакциях. А образовавшиеся при этом фотоны достигнут поверхности через 10^8 лет. Нейтрино имеет очень малое сечение взаимодействия, поэтому они моментально со скоростью света покидают звезду. Поэтому в переносе энергии через атмосферу звезды они не играют роли.

Характеристики поля излучения

Поскольку выше мы убедились в важности излучения, рассмотрим его основные характеристики. Выбор теоретического подхода при изучении поля излучения зависит от того:

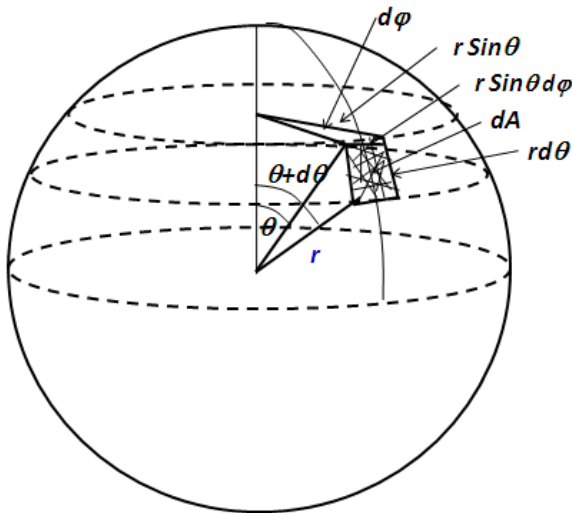
- какие свойства излучения нас интересуют;
- какую точность мы требуем от теории;
- какие приближения в теории нас удовлетворяют.

Выше мы уже упомянули два подхода, используемые, в частности, в теории ЗА.

- 1) Квантово-механический подход. При этом подходе поле излучения рассматривается как ансамбль дискретных квантов энергии $h\nu$. Этот подход целесообразно использовать при рассмотрении взаимодействия излучения со средой на микроскопическом уровне – поглощение, излучение, рассеяние отдельных фотонов отдельными атомами и молекулами.
- 2) Классический подход. В этом случае поле излучения представляется как классическое электромагнитное поле, которое является непрерывной функцией в пространстве и времени с хорошо известными значениями электрического и магнитного полей. Атом рассматривается как гармонический осциллятор, т.е. как система, в которой электрон подвержен влиянию силы, которая пропорциональна смещению. Излучение представляется как полуклассический газ фотонов. Фотоны двигаются по прямым траекториям и возникают (исчезают) при взаимодействии с частицами.
- 3) Излучение как поток энергии. Такой подход очень полезен при рассмотрении термодинамических свойств газа и излучения.

В теории звездных атмосфер обычно используют все эти подходы.

Для начала напомним понятие телесного угла (рис. 20).



$$\text{телесный угол } d\omega = \frac{dA}{r^2}$$

полный телесный

$$\text{угол} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

$$dA = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

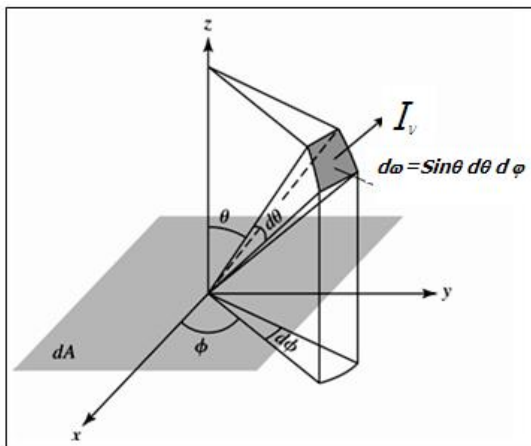
$$\text{обозначим } \mu = \cos \theta$$

$$d\mu = -\sin \theta d\theta$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$$

Рис. 20. Определение телесного угла

Удельная интенсивность излучения – это количество лучистой энергии, прошедшей через единичную площадку в единичном телесном угле за 1 сек и в единичном интервале частот и под углом θ к этой площадке (рис. 21). Размерность: интенсивности – эрг/(см² стерадиан гц сек).



$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{dA d\omega dt d\nu}$$

Рис. 21. Определение интенсивности.

В шкале длин волн интенсивность выражается через I_ν следующими простыми соотношениями:

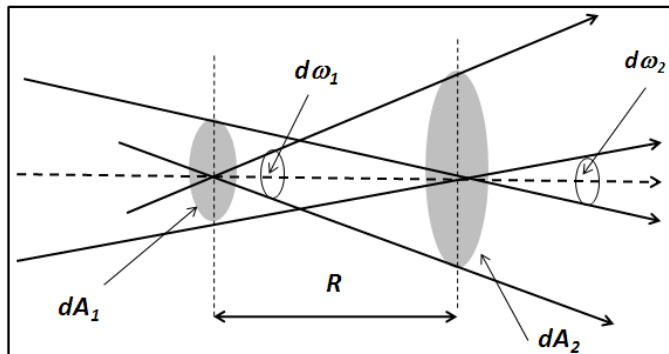
$$dE = I_\lambda dA dt d\lambda d\omega, \quad I_\nu |\Delta \nu| = I_\lambda |\Delta \lambda|,$$

$$\nu \lambda = c \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\Delta \lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}, \quad I_\nu = \frac{c}{\nu^2} I_\lambda \quad I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu.$$

Размерность I_λ эрг/(см² сек стерадиан А). Свойства интенсивности такие:

1. Интенсивность не зависит от расстояния наблюдателя до источника излучения. Возьмем в пустом пространстве две площадки dA_1 и dA_2 , перпендикулярные

лучам света. Для всех лучей, проходящих через обе площадки, энергия должна сохраняться:

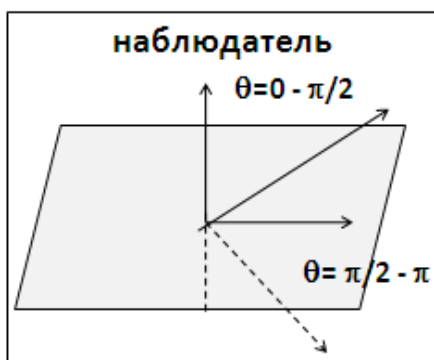


$$dE_1 = I_v^{(1)} dA_1 dt d\omega_1 d\nu_1 = I_v^{(2)} dA_2 dt d\omega_2 d\nu_2 = dE_2.$$

Так как $d\omega_1 = dA_2/R^2$, $d\omega_2 = dA_1/R^2$ и $d\nu_1 = d\nu_2$, то $I_v^{(1)} = I_v^{(2)}$.

2. Интенсивность в интервалах $d\nu$ и $d\lambda$ различаются.
3. Форма спектра интенсивности в эти интервалах также разная. Пример: максимум излучения для Солнца в шкале длин волн – при $\lambda=8000\text{А}$; максимум излучения в шкале частот - при $\lambda=4500\text{ А}$.
4. Интенсивность может наблюдаться только для пространственно разрешенных (т.е. неточечных) объектов.
5. В общем случае интенсивность зависит от координат и направления: $I_v(x, y, z, \vartheta, \varphi)$.
6. Но интересны следующие частные случаи:
 - интенсивность не зависит от направления для данной точки среды – свойство изотропности;
 - интенсивность не зависит от направления для всех точек среды – свойство однородности.

Средняя интенсивность J_v это интенсивность, проинтегрированная по всем направлениям. Эта величина широко используется в теории ЗА. Для ее получения достаточно произвести интегрирование удельной интенсивности $I_v(w)$ по полному телесному углу 4π (или по углам θ и φ).



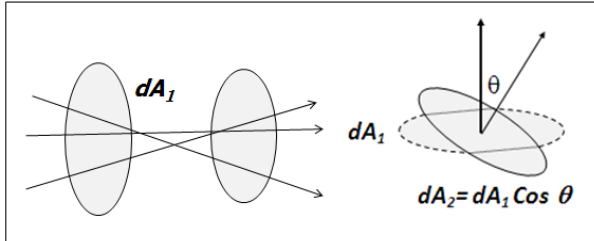
$$J_v = \frac{1}{4\pi} \oint I_v(\omega) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_v(\varphi, \theta) d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi I_v(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(\mu) d\mu,$$

$$\mu = \cos \vartheta.$$

В первом интеграле проводится интегрирование по всем направлениям, другими словами: по θ - от 0 до π , по φ - от 0 до 2π . Но из-за предположения об азимутальной симметрии интегрирование по φ дает величину 2π , что учтено в интеграле.

Поток излучения. Фотоны проходят через площадки во всех направлениях. Поток - это лучистая энергия, прошедшая через единичную площадку во всех направлениях за единицу времени в единичном интервале частот.



$$F_{\nu} = \oint I_{\nu} \cos \theta d\omega,$$

$$F_{\lambda} = \oint I_{\lambda} \cos \theta d\omega.$$

Размерность потока эрг/см²/сек/гц или эрг/см²/сек/А. Чтобы провести интегрирование по всей сфере, надо выразить $d\omega$ через φ и θ . Выше было показано, что $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Тогда поток будет определяться как

$$F_{\lambda} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi,$$

С учетом азимутальной симметрии (независимость интенсивности от φ) имеем:

$$F_{\nu} = 2\pi \int_0^{\pi} I_{\nu}(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad F_{\nu} = 2\pi \int_{-1}^1 I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) \mu d\mu \quad (4)$$

Выражение (4) может быть переписано в следующей форме:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 I(\mu) \mu d\mu + 2\pi \int_{-1}^0 I(\mu) \mu d\mu = \\ &= 2\pi \int_0^1 I(\mu) \mu d\mu - 2\pi \int_0^1 I(-\mu) \mu d\mu = F^+ - F^-. \end{aligned}$$

Первый член это энергия, проходящая в одной полусфере, а второй член есть энергия, проходящая в противоположной полусфере. Таким образом, поток есть разность этих энергий. Ясно, что при изотропном характере излучения поток равен нулю.

В теории излучения часто используется понятие «эддингтоновского потока» $H_{\nu} = F_{\nu} / 4\pi$. Кроме того, используется и понятие «астрофизического потока» $F(a\phi)$ - интенсивность излучения, проинтегрированная по диску звезды. Его определение показано ниже (рис.22).

До сих пор мы имели виду, излучение, вышедшее с поверхности звезды. Наблюдатель же регистрирует «наблюдаемый» поток f_ν , определяемый непосредственно аппаратурой на поверхности Земли (см. рис. 23).

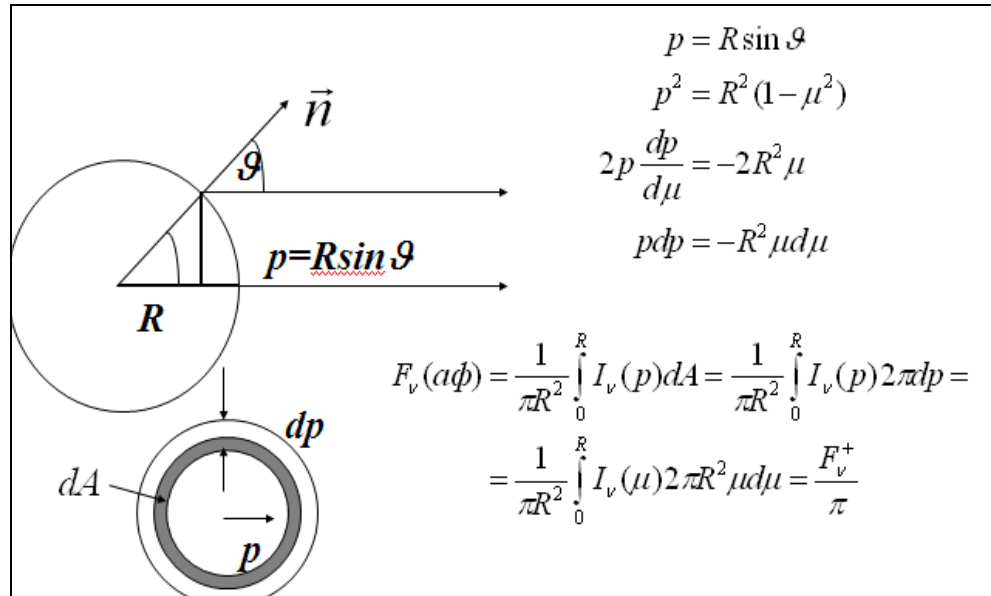


Рис. 22. Определение «астрофизического» потока.

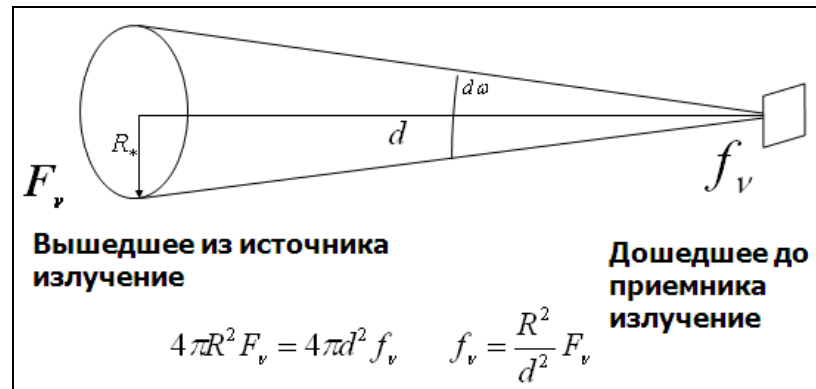


Рис. 23. Определение «наблюдаемого» потока

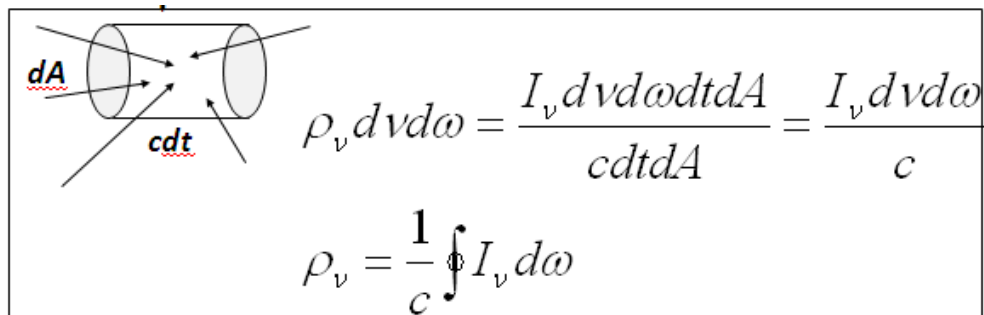
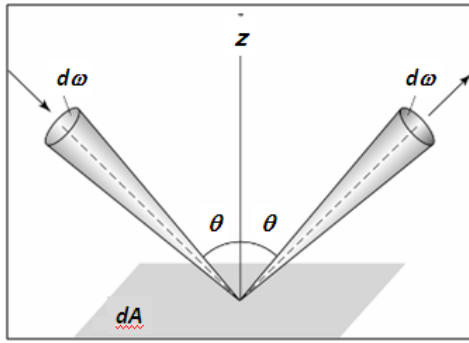


Рис. 24. Определение плотности излучения

Плотность излучения ρ_ν – количество лучистой энергии в единице объема в единичном интервале частот. Ее определение приведено на рис. 25.

Давление света. Фотон с энергией E_ν имеет момент $P(\nu, \omega) = E_\nu / c$. Соответствующая сила равна



$$f = \frac{dP(\nu, \omega)}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu}{dt} \cos \theta$$

Рис. 25. Определение давления излучения.

Тогда давление света будет определяться из следующей серии формул:

$$dP(\nu, \omega) = \frac{f}{dA} = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu \cos \theta}{dt dA} = \frac{1}{c} \frac{\oint I_\nu d\omega d\theta dA \cos^2 \theta}{dt dA} = \frac{1}{c} I_\nu \cos^2 \theta d\omega d\nu$$

$$=,$$

$$P(\nu) = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} I_\nu \cos^2 \theta d\omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{c} K_\nu, \quad K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu.$$

Для изотропного поля излучения имеем

$$I_\nu(\mu) = I_\nu,$$

$$P(\nu) = \frac{4\pi}{c} \frac{I_\nu}{3}, \quad \rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \Rightarrow P(\nu) = \frac{1}{3} \rho_\nu, \quad J_\nu = 3K_\nu.$$

Размерность давления - дина $\text{см}^{-2} \text{ гц}^{-1}$.

Радиативное ускорение g_{rad} . При поглощении кванты передают свой момент. Поэтому атомы приобретают радиативное (или лучистое) ускорение. Используя формулу

$$dP_\nu = \frac{F}{dA} = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu \cos \theta}{dt dA},$$

после серии подстановок выводится окончательная формула для g_{rad} :

$$g_{rad} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\nu F_\nu d\nu}{c\rho}.$$

Здесь мы использовали коэффициент поглощения α_ν , о котором речь будет идти ниже.

В завершении, посмотрим на введенные определения потока и средней интенсивности таким образом: средняя интенсивность и поток можно рассматривать как нулевой и первый моменты по μ для интенсивности:

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu, \quad H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu d\mu.$$

По аналогии можно ввести и второй момент, который будет записываться таким образом:

$$K_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(\mu) \mu^2 d\mu.$$

Ниже нам понадобится так называемый фактор Эддингтона $f=K/J$. Как было установлено, его значение определяет характер излучения:

$f=0$ - излучение преимущественно двигается в направлении плоскости симметрии (например, у аккреционных дисков);

$f=1/3$ - излучение полностью изотропно. Это выполняется для глубоких слоев звездной атмосферы;

$1 < f < 1/3$ - излучение исходит с поверхностных слоев ЗА;

$f \rightarrow 1/3$ - это выполняется для вышедшего излучения на большом расстоянии от сферической звезды;

$f \sim 1$ - концентрация излучения вдоль направления к нормали к поверхности плоскопараллельной атмосфере.

Поглощение в среде

При прохождении излучения через среду происходят процессы взаимодействия, приводящие к исчезновению квантов (в результате поглощения), к изменению направления движения квантов (в результате рассеяния), так и к появлению квантов при переизлучении в результате рассеяния в сторону к наблюдателю или других механизмов (см. рис. 26). Важно отметить, что два процесса (поглощение и рассеяние) принципиально различаются при рассмотрении их взаимодействия с частицами среды. При поглощении энергия фотона может частично или полностью перейти в кинетическую энергию частиц. Этот процесс называется истинным поглощением. При рассеянии никакой перекачки энергии из поля излучения в кинетическую энергию частиц не осуществляется.

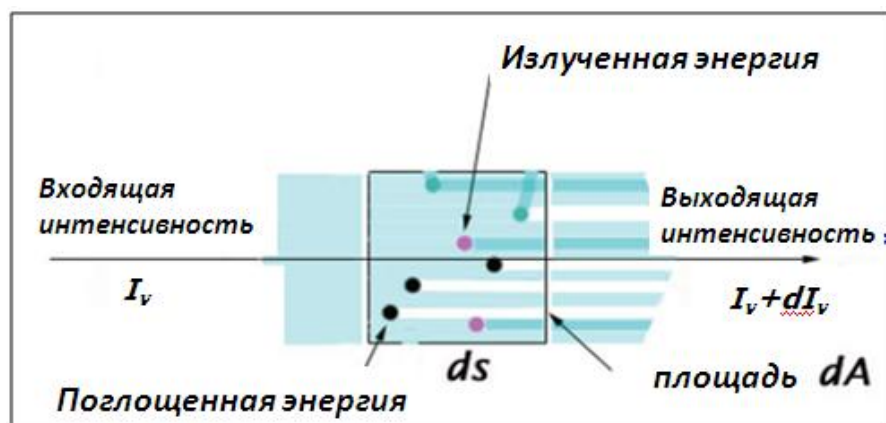


Рис. 26. Поглощение и излучение среды.

Эти процессы следует описать количественно.

Коэффициент поглощения. Очевидно, что количество поглощенной энергии пропорционально:

- количеству упавшей энергии (интенсивности) I_ν ,
- длине пути ds ,
- коэффициенту поглощения (на единицу пути) k_ν , который описывает оптические свойства среды.

Таким образом,

$$dI_\nu = -k_\nu I_\nu ds.$$

Коэффициент рассеяния. При прохождении через среду часть излучения может рассеиваться в сторону от первоначального направления к наблюдателю. Хотя кванты не изымаются из поля излучения, наблюдатель будет фиксировать уменьшение интенсивности (по аналогии с поглощением). Количество рассеянной энергии пропорционально:

- количеству упавшей энергии (интенсивности) I_ν ,
- длине пути ds ,
- коэффициенту рассеяния (на единицу пути) σ_ν

$$dI_\nu = -\sigma_\nu I_\nu ds.$$

Коэффициент экстинкции. Поскольку оба процесса (поглощение и рассеяние) могут действовать одновременно, то обычно вводят суммарный коэффициент экстинкции α_ν :


$$dI_\nu = -(k_\nu + \sigma_\nu) I_\nu ds = -\alpha_\nu I_\nu ds. \quad (5)$$

Заметим, что в литературе коэффициент экстинкции иногда называют все же коэффициентом поглощения.

Размерность коэффициентов. Все коэффициенты могут быть рассчитаны:

- на единицу пути α_ν : $dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$, $[\alpha_\nu] = \text{см}^{-1}$;
- на единицу массы (грамм): $dI_\nu = -\alpha'_\nu \rho I_\nu ds$, $[\alpha'_\nu] = \text{см}^2 \text{г}^{-1}$ (в теории ЗА этот коэффициент иногда называется «непрозрачностью»);
- на 1 частицу: $[\alpha''_\nu] = \text{см}^2$. Этот коэффициент имеет размерность сечения, и он обычно обозначается как σ_ν ;
- на 1 см^3 : $\alpha'''_\nu = \alpha_\nu N$, $[\alpha'''_\nu] = \text{см}^{-4}$.

Оптическая толщина. Удобно свойства среды характеризовать не двумя величинами α_ν и ds , а одной величиной – оптической глубиной (толщиной) $d\tau_\nu$:



$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds,$$

$$\tau_\nu = \int_0^L \alpha_\nu ds.$$

Причем в теории ЗА оптическую глубину обычно отсчитывают с поверхности звезды вглубь. Часто используется следующая терминология:

- если $\tau_\nu > 1$, то среда считается оптически толстой. Тогда:

- фотон может много раз взаимодействовать с частицами, прежде чем покинуть среду;
- фотон, вошедший в среду, может за счет таких взаимодействий сильно изменить свое первоначальное направление;
- нельзя наблюдать источник излучения позади среды, можно лишь видеть излучение с поверхностных слоев среды; например, нельзя пронаблюдать внутренние слои звезд, а только поверхность атмосферы звезды;
- есть преимущество оптически толстой среды – излучение от нее может носить характер абсолютно черного тела.

- если $\tau_\nu < 1$, то среда считается оптически тонкой. Тогда:

- шансы взаимодействия фотона с частицами очень малы;
- источник излучения может быть виден через среду;
- количество поглощения или рассеяния прямо пропорционально количеству вещества среды.

Теперь запись (5) будет иметь вид

$$dI_\nu = -(k_\nu + \sigma_\nu)I_\nu ds = -I_\nu d\tau_\nu.$$

При отсутствии переизлучения в среде это уравнение имеет простое решение

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu}.$$

Здесь I_0 есть падающая на слой интенсивность излучения.

Длина свободного пробега фотона S . Какое среднее расстояние пройдет фотон до очередного акта поглощения?



Средний оптический путь между актом излучения фотона и его поглощением равен

$$\bar{\tau}_\nu = \int_0^\infty \tau_\nu p(\tau_\nu) d\tau_\nu.$$

Вероятность того, что фотон поглотится на расстоянии $(\tau_v + d\tau_v)$ равна

$$p(\tau_v) = p_1(\tau_v)p_2(\tau_v),$$

где $p_1(\tau_v)$ есть вероятность того, что на пути $(0, \tau_v)$ фотон не поглотится, а $p_2(\tau_v)$ есть вероятность того, что на пути $(\tau_v + d\tau_v)$ фотон поглотится. Вероятность $p_1(\tau_v)$ поглощения фотона на пути $(0, \tau_v)$ определяется через следующие формулы:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_0 - I(\tau_v)}{I_0} = 1 - \frac{I(\tau_v)}{I_0},$$

$$p_1(\tau_v) = 1 - \left[1 - \frac{I(\tau_v)}{I_0} \right] = \frac{I(\tau_v)}{I_0} = e^{-\tau_v}$$

Вероятность $p_2(\tau_v)$ равна:

$$p_2(\tau_v) = \frac{dI_v}{I(\tau_v)} = d\tau_v.$$

Следовательно

$$p(\tau_v) = p_1(\tau_v)p_2(\tau_v) = e^{-\tau_v} d\tau_v.$$

В итоге получается, что

$$\bar{\tau}_v = \int_0^{\infty} \tau_v p(\tau_v) d\tau_v = \int_0^{\infty} \tau_v p_1(\tau_v) p_2(\tau_v) d\tau_v = \int_0^{\infty} \tau_v e^{-\tau_v} d\tau_v = 1.$$

Таким образом, оптическая длина свободного пробега фотона соответствует значению $\tau_v=1$. При пересчете на линейный путь имеем

$$\bar{\tau}_v = 1 = \alpha_v \bar{s} \Rightarrow \bar{s} = \frac{1}{\alpha_v}.$$

Излучение среды

Излучение, регистрируемое наблюдателем, может увеличиться в результате таких процессов:

- излучение, возникшее за счет других резервуаров энергии (например, за счет кинетической энергии частиц, за счет передачи энергии возбуждения и др.).

- рассеяние, то есть появление квантов в данном направлении к наблюдателю.

Коэффициент излучения. Эти процессы можно характеризовать соответствующими коэффициентами излучения

$$dI_{\nu} = \varepsilon_{\nu}^t ds d\omega dA,$$

$$dI_{\nu} = \varepsilon_{\nu}^s ds d\omega dA.$$

Размерность коэффициентов такая – $[\varepsilon_{\nu}] = [\text{эрг см}^{-3} \text{ герц стерадиан сек}]$. В ряде случаев предпочтительней иметь дело с коэффициентами излучения, рассчитанными не на единицу объема, а на единицу телесного угла и единицу массы:

$$\varepsilon_{\nu}' = 4\pi\varepsilon_{\nu} / \rho.$$

В заключение отметим, что в дальнейшем мы будем использовать такие предположения:

- 1) Мы всегда будем считать, что коэффициенты поглощения и излучения не зависят от направления (т.е. их изотропность). Неизотропность может возникать, например, при наличии магнитного поля или когда имеют место процессы неизотропности процессов рассеяния.
- 2) Строго говоря, при рассеянии частота упавшего на частицу кванта ν_1 и частота рассеянного частицей кванта ν_2 могут различаться (этот процесс называется некогерентностью рассеяния). В дальнейшем мы будем предполагать когерентность рассеяния, то есть частоты одинаковы: $\nu_1 = \nu_2$.

Уравнение переноса излучения (дифференциальный вид).

Это уравнение описывает процесс миграции фотонов через среду атмосферы при процессах поглощения, рассеяния и переизлучения. В итоге фотон достигает границы ЗА и уходит в пространство. Существует три варианта записи уравнения переноса (УП):

1. дифференциальный вид,
2. интегральный вид (уравнение Милна),
3. интегро-дифференциальный вид.

И для каждого варианта разработаны свои методы решения.

Дифференциальная форма УП является более распространенной, так как она позволяет использовать многочисленные разностные методы решения. Начнем с этой формы записи.

Дифференциальная форма УП. При прохождении излучения через газ интенсивность изменится в соответствии с равенством:

$$\begin{aligned} dI_{\nu} &= \text{поглощенная энергия} + \text{излученная энергия} = \\ &= dI_{\nu}^{-} + dI_{\nu}^{+} = -\alpha_{\nu} I_{\nu} ds + \varepsilon_{\nu} ds. \end{aligned}$$

Отсюда получаем основной вид уравнения:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu . \quad (6)$$

Далее предпочтительней от пути ds перейти к величине dz (см. рис. 27) и использовать оптическую глубину, отсчитываемую с поверхности звезды внутрь.

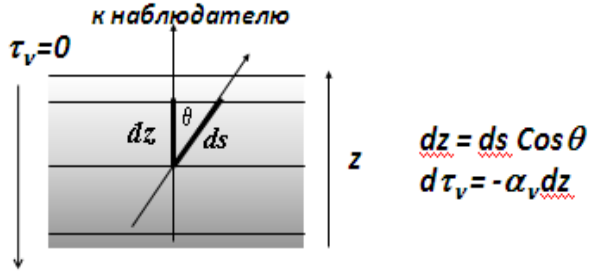


Рис. 27. Отсчет глубин в ЗА.

Тогда вторая запись УП будет такой:

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} .$$

В дальнейшем будет удобней использовать понятие функции источника S_ν , определяемую как отношение двух коэффициентов – излучения и поглощения:

$$S_\nu = \varepsilon_\nu / \alpha_\nu .$$

Функция источника описывает локальный вклад среды в поле излучения всеми возможными физическими процессами на расстоянии среднего пути фотона:

$$\alpha_\nu = \frac{d\tau_\nu}{ds} \approx \frac{\Delta\tau_\nu}{\Delta s} \approx \frac{1}{\bar{s}}, \quad S_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} \approx \varepsilon_\nu \bar{s} .$$

Зачем нужна эта функция? Она полезна при рассмотрении переноса излучения через газ. Если в уравнении переноса использовать комбинацию $(\alpha_\nu, \varepsilon_\nu)$, то надо иметь в виду, что эти величины могут меняться на несколько порядков даже в узком интервале частот (например, в линии). Более удобно использовать комбинацию (α_ν, S_ν) , так как в отношении $\varepsilon_\nu / \alpha_\nu$ такие вариации в величине S_ν почти компенсируются.

Для двух случаев функция источника имеет простой вид. Если фотоны не рассеиваются, а поглощаются, и часть их энергии переходит в кинетическую энергию частиц, то хорошим приближением является равенство функции источника функции Планка - фотоны появляются как результат излучения газа как абсолютно черного тела: $S_\nu^t = B_\nu(T)$.

Если фотоны появляются только после предварительного поглощения и последующего изотропного переизлучения (а это есть процесс рассеяния) и рассеяния на частицах, то излучение пропорционально падающей рассеиваемой энергии, пройденному расстоянию и телесному углу

$$\varepsilon_V^S = \sigma_V I_V dx d\omega, \quad \varepsilon_V^S = \oint \sigma_V I_V d\omega / 4\pi = \frac{\sigma_V}{4\pi} \oint I_V d\omega = \sigma_V J_V, \quad S_V^S = J_V.$$

При одновременном действии обоих механизмов, функция источника имеет следующий вид:

$$S_V = \frac{\varepsilon_V^t + \varepsilon_V^S}{k_V + \sigma_V} = \frac{\varepsilon_V^t}{k_V + \sigma_V} + \frac{\varepsilon_V^S}{k_V + \sigma_V} = \frac{k_V}{k_V + \sigma_V} B_V(T) + \frac{\sigma_V}{k_V + \sigma_V} J_V,$$

$$\gamma_V = \frac{k_V}{k_V + \sigma_V}, \quad S_V = \gamma_V B_V(T) + (1 - \gamma_V) J_V. \quad (7)$$

Параметр γ_V отражает вероятность разрушения кванта, величина $(1 - \gamma_V)$ является альбедо единичного рассеяния.

Теперь УП можно записать в следующей форме:

$$\cos \theta \frac{dI_V(\vartheta, \tau_V)}{d\tau_V} = I_V(\vartheta, \tau_V) - S_V(\tau_V).$$

Некоторые следствия из этого уравнения таковы:

- при $I_V < S_V$ интенсивность увеличивается по мере удаления от центра звезды, а при $I_V > S_V$ интенсивность уменьшается;

- при отсутствии вещества имеем:

$$\alpha_V = 0, \quad \varepsilon_V = 0 \Rightarrow \frac{dI_V}{ds} = 0 \Rightarrow I_V = \text{const},$$

- в однородном поле излучения имеем:

$$\frac{dI_V}{ds} = 0 \Rightarrow \varepsilon_V = \alpha_V I_V = \alpha_V B_V(T) - \text{закон Кирхгофа},$$

- если среда только излучает, то

$$\alpha_V = 0 \Rightarrow \mu \frac{dI_V}{ds} = \varepsilon_V \Rightarrow I_V = I_V(0) + \frac{1}{\mu} \int_0^\tau \varepsilon_V ds,$$

- если среда только поглощает, то

$$\varepsilon_V = 0 \Rightarrow \mu \frac{dI_V}{ds} = -\alpha_V I_V,$$

$$I_V(\tau_V) = I_V(0) \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^s \alpha_V ds\right) = I_V(0) \exp(-\tau_V).$$

Формальное решение уравнения переноса. Перепишем уравнение переноса в следующем виде:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - S_\nu, \quad \frac{dI_\nu}{d\tau} + \frac{1}{-\mu} I_\nu = \frac{1}{-\mu} S_\nu.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка имеет стандартный метод решения – метод интегрирующего множителя. Умножение обеих частей уравнения на $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ дает:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}) = -\frac{S_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu}.$$

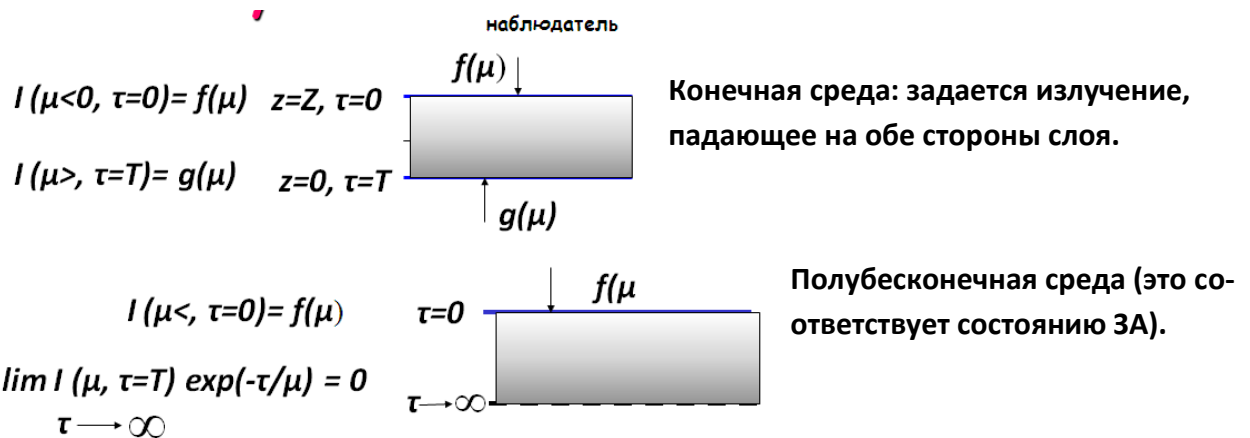
Интегрирование в интервале глубин (τ_2, τ_1) дает:

$$I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{S_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu} d\tau_\nu,$$

$$I_\nu(\tau_1, \mu) = I_\nu(\tau_2, \mu) e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{S_\nu e^{-\frac{\tau_\nu - \tau_2}{\mu}}}{\mu} d\tau_\nu. \quad (8)$$

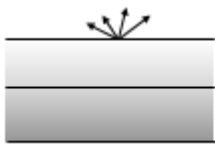

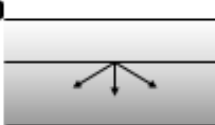
Последнее выражение (8) позволяет определить интенсивность на любой глубине, зная интенсивность на другой глубине. Оно имеет простую физическую интерпретацию. Первый член есть интенсивность на одной глубине, которая равна интенсивности на другой глубине, уменьшенной за счет поглощения на пути между этими глубинами. Второй член есть излучение, возникшее между этими двумя глубинами и опять уменьшенное за счет поглощения на этом же пути.

При решении уравнения переноса необходимо использовать граничные условия. В астрофизике чаще используются два варианта:



Следует обратить внимание, что для излучения в глубоких слоях задается несколько иное условие. Студенту рекомендуем подумать: что отражает это условие для ЗА? Часто для больших глубин используют и такое граничное условие: $I(\mu, \tau) = B(T)$. Следую-

щий вопрос студенту: почему это возможно? Наиболее важные варианты записи (8) для 3А такие.

$\tau_1 = 0$  $\tau_2 = \infty$	$I_\nu(\tau_1 = 0, \mu > 0) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}$	- выходящая с поверхности звезды интенсивность.
$\tau_1 = \tau$  $\tau_2 = \infty$	$I_\nu(\tau, \mu > 0) = \int_\tau^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}$	- интенсивность, идущая с глубины τ вверх.
$\tau_2 = 0$  $\tau_1 = \tau$	$I_\nu(\tau, \mu < 0) = \int_\tau^0 S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}$	- интенсивность, идущая с глубины τ внутрь.

Следует заметить, что записанные два граничных условия записаны для атмосферы, у которой имеется азимутальная симметрия, т.е. отсутствует зависимость интенсивности от координаты x . В более сложных задачах, когда такая зависимость имеется (это случает так называемых 2D-моделей), необходимо задавать 4 граничных условия. Для еще более сложных 3D - моделей необходимы уже 6 граничных условий.

Весьма важно рассмотреть вопрос образования спектральных линий в однородной среде. Приведенные ниже примеры взяты из лекций, читанных проф. Р. ван Хелденом в Утрехтском университете (Голландия).

Предположим, что такая однородная среда имеет оптическую протяженность $\tau_\nu(D)$. Поскольку в такой среде функция источника не зависит от положения, то основное соотношение (8) будет иметь следующий вид:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu(D)}).$$

Для оптически толстой среды с $\tau(D) > 1$ имеем $I_\nu(D) = S_\nu$. Для оптически тонкой среды с $\tau(D) < 1$ имеем

$$I_\nu(D) \approx I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)] \tau_\nu(D).$$

Интересны следующие варианты (рис. 28).

Дадим несколько замечаний.

- 1) Почему решение считается формальным? При решении уравнения переноса мы молчаливо предполагали, что функция источника известна. На самом деле функция источника сама может зависеть от искомой интенсивности. Особенно это сильно проявляется при процессах рассеяния излучения: энергия фотонов сперва поглощается, а затем переизлучается.

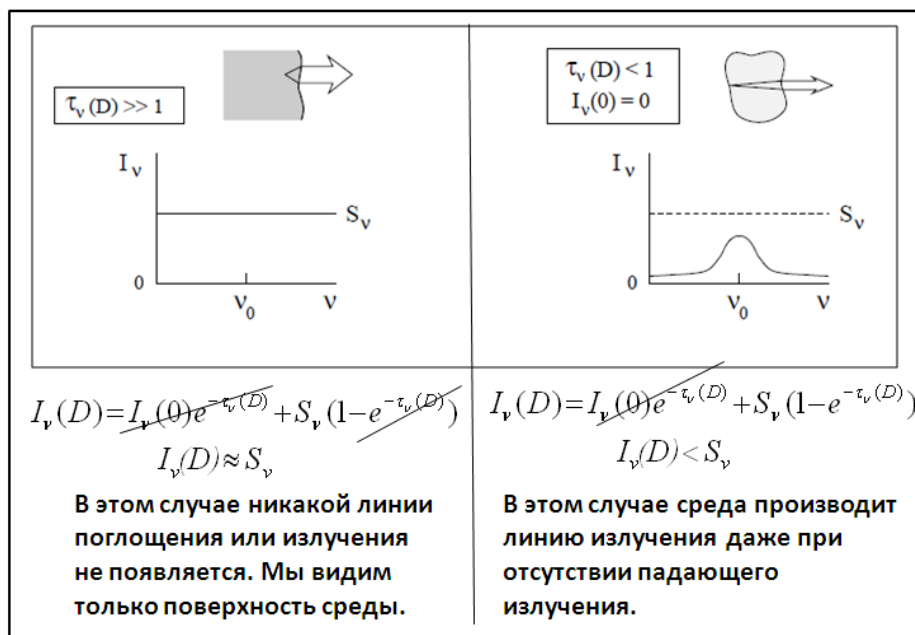
2) Еще раз запишем функцию источника с учетом рассеяния:

$$\gamma = \frac{k_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu}, \quad S_\nu = \gamma B_\nu(T) + (1 - \gamma)J_\nu.$$

Здесь возможны некоторые варианты.

а) Если $\gamma \rightarrow 1$, то $S_\nu \rightarrow B_\nu$. Другими словами, решение УП определяется локальными свойствами среды (температуры).

б) Если $\gamma \rightarrow 0$, то $S_\nu \rightarrow J_\nu$. Тогда УП будет определяться в полной мер интегральными свойствами уравнения переноса, так как интенсивность излучения уже зависит от условий в месте возникновения квантов.



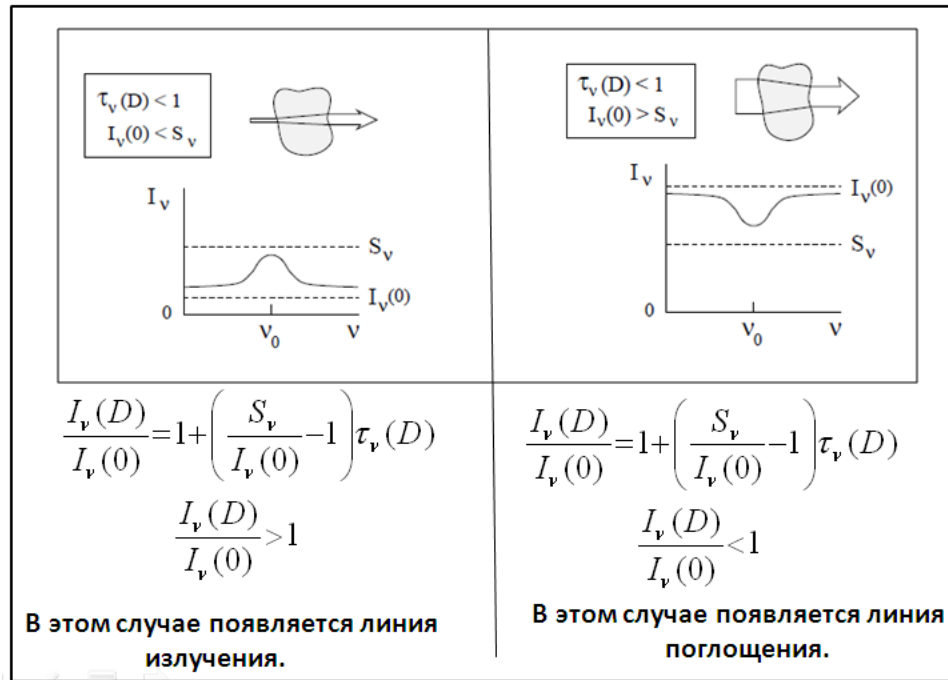


Рис. 28. Поведение излучения в однородной среде (функция источника не зависит от глубины).

- 3) Вторая трудность связана с производной $\mu dl/ds$ или $\mu dl/d\tau$. Величина $\mu = \cos\theta$ может принять значения, близкие к нулю (например, около лимба звезды). В результате этого УП становится сингулярным. И эта сингулярность очень важна для поверхностных слоев, которые ответственны за образование спектра звезды.

Диффузное приближение. В глубоких слоях фотон не имеет шансов выйти с поверхности, и функция источника приближается к функции Планка. Выберем на больших глубинах, где $\tau_v \gg 1$, некоторую глубину t_v , около которой разложим значение функции источника в ряд Тейлора:

$$S_v(t_v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B_v}{d\tau_v^n} \frac{(t_v - \tau_v)^n}{n!}.$$

Подставляя это выражение в формальное решение уравнения переноса излучения, будем иметь для интенсивности следующее:

$$I_v(t_v) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B_v}{d\tau_v^n} = B_v(\tau_v) + \mu \frac{dB_v}{d\tau_v} + \mu \frac{d^2 B_v}{d\tau_v^2} + \dots$$

Подстановка этого соотношения в моменты от интенсивности дает следующий результат:

$$J_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots, \quad H_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \dots,$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{3} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{5} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots$$

Эти соотношения показывают ряд важных следствий.

- 1) Не только функция источника, но и средняя интенсивность на больших глубинах стремится к функции Планка.
- 2) Излучение будет изотропным и фактор Эддингтона $f_\nu = K_\nu/H_\nu$ стремится к 1/3.
- 3) Монохроматический поток определяется производной от функции Планка.
- 4) Следствие 3 дает другой важный результат:

$$H_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dz} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dz}.$$

Такое соотношение между переносом энергии и градиентом температуры мы уже рассматривали выше (см. формулу (1)).

Уравнение переноса излучения (интегральный вид).

Ниже показан ход преобразований для получения интегрального уравнения. Напомним, что

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 I_\nu^+ d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 I_\nu^- d\mu.$$

Подставляем известные решения УПИ в последние два члена:

$$I_\nu^+(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}, \quad I_\nu^-(\tau_\nu, \mu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}.$$

Тогда имеем равенство

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} dt_\nu - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} dt_\nu.$$

Произведем подстановки в каждый член равенства:

$$w = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{d\mu}{\mu}, \quad w = -\frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{d\mu}{\mu}.$$

После таких преобразований можно получить следующее уравнение:

$$J_{\nu} = \frac{1}{2} \left[\int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) dt_{\nu} \int_1^{\infty} e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu})w} \frac{dw}{w} + \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) dt_{\nu} \int_1^{\infty} e^{-(\tau_{\nu}-t_{\nu})w} \frac{dw}{w} \right].$$

$> 0 \qquad \qquad \qquad > 0$

Поскольку величины $(t_{\nu} - \tau_{\nu})$ и $(\tau_{\nu} - t_{\nu})$ величины положительные в каждом интеграле, то оба члена уравнения можно объединить:

$$J(\tau_{\nu}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t_{\nu}) E_1(|\tau_{\nu} - t_{\nu}|) dt_{\nu}, \quad E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n} dy. \quad (9)$$

Это уравнение для средней интенсивности называется уравнением Шварцшильда. Иногда это равенство записывают через лямбда-оператор:

$$J_{\nu}(\tau_{\nu}) = \Lambda_{\tau_{\nu}} [S(t)], \quad \Lambda_{\tau} [f(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|t - \tau|) f(t) dt.$$

Интегрально-показательная функция E_n широко используется в астрофизических исследованиях. Ниже проведены рабочие формулы для расчетов.

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^n}$$

$$\frac{dE_{n+1}(x)}{dx} = -E_n(x)$$

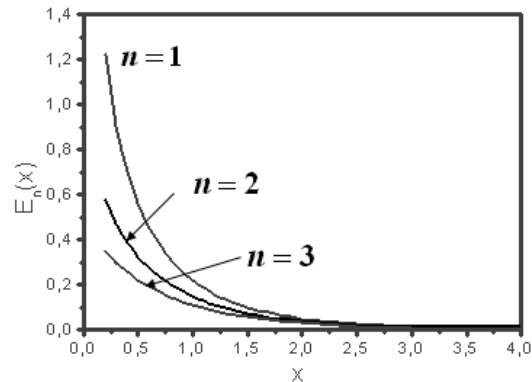
$$E_1(x=0) = \infty$$

$$E_2(x=0) = 1$$

$$E_3(x=0) = 0.5$$

$$E_n(x \rightarrow \infty) = \frac{n}{n-1}$$

$$nE_{n+1} = e^{-x} - xE_n(x)$$



Объединяя выражения (7) и (9), можно получить интегральное выражение для функции источника:

$$S_{\nu}(\tau_{\nu}) = \frac{k_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} B_{\nu}(T) + \frac{\sigma_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) E_1(|\tau_{\nu} - t_{\nu}|) dt.$$

Если провести преобразования для потока, то можно получить уравнение Милна:

$$F(\tau_\nu) = 2\pi \int_0^1 I_\nu(\mu) d\mu - 2\pi \int_{-1}^0 I_\nu(\mu) d\mu =$$

$$2\pi \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_2(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu - 2\pi \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_2(|\tau_\nu - t_\nu|) dt_\nu$$

Условие лучистого равновесия

Рассмотрим следующий пример. Видимое излучение от Солнца исходит из верхних слоев толщиной в несколько сотен км. В столбце слоя протяженностью в 100 км и сечением в 1 см^2 находится 10^{24} частиц. Каждая частица имеет тепловую энергию $3 / 2 kT \sim 10^{-12}$ эрг. Таким образом, полная тепловая энергия столбца равна $E = 10^{12}$ эрг / см^2 . Наблюдаемая потеря Солнцем энергия с 1 см^2 солнечной поверхности равна $F = 6.3 \cdot 10^{10}$ эрг / см^2 / сек. Это означает, что теплового запаса столбца хватило бы только на 15 сек: $t = E / F = 10^{12} / 6.3 \cdot 10^{10} = 15$ сек.

Поскольку Солнце постоянно светит, то эти потери должны полностью восполняться. В противном случае температура слоя должна за 15 сек. сильно измениться. Но этого не происходит! Это означает, что в слое полный поток должен быть постоянным. А это уже есть формулировка условия равновесия (УЛР): закон сохранения энергии требует, чтобы полный поток энергии был бы постоянным на всех глубинах атмосферы.

В случае переноса энергии только излучением это означает, что приобретенная объемом энергия излучения должна равняться отдаваемой энергии излучения. При этом нагрев или охлаждение объема осуществляется через процесс обмена энергии между частицами и полем излучения. Например, нагрев среды осуществляется при процессах фотоионизации, свободно-свободном поглощении и др. Охлаждение среды происходит, например, при фоторекомбинации, свободно-свободном излучении и др.

Равенство энергии поглощенной и излученной и составляет условие лучистого равновесия (УЛР), которое должно выполняться в звездных атмосферах. В объем газа поступает энергия E^+ , и она через ряд процессов (например, через ударное возбуждение, через фотоионизацию или через ff -поглощение) производит нагрев среды. Но обратные процессы (например, через ударное девозбуждение, фотоорекомбинацию или через ff -излучение) охлаждают среду на величину E^- . Выполнение условия лучистого равновесия требует выполнение равенства $E^+ = E^-$. Ниже приведена последовательность различных вариантов записи УЛР.

$E_{\nu}^{+}(\omega) = \alpha_{\nu}(\omega)I_{\nu}(\omega)d\omega$, - поглощенная энергия,

$$E^{+} = \int_0^{\infty} d\nu \oint \alpha_{\nu}(\omega)I_{\nu}(\omega)d\omega = \int_0^{\infty} \alpha_{\nu}d\nu \oint I_{\nu}(\omega)d\omega,$$

$E_{\nu}^{-}(\omega) = \varepsilon_{\nu}(\omega)d\omega$, - излученная энергия,

$$E^{-} = \int_0^{\infty} d\nu \oint \varepsilon_{\nu}(\omega)d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu}d\nu,$$

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\nu}d\nu \oint I_{\nu}(\omega)d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu}d\nu, - \text{УЛР (1 вариант)},$$

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\nu}J_{\nu}d\nu = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu}d\nu, - \text{УЛР (2 вариант)}.$$

Можно получить и две другие записи УЛР. Одна приведена ниже:

$$\int \alpha_{\nu}J_{\nu}d\nu = \int \frac{\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu}}{\alpha_{\nu}}d\nu, \dots \int \alpha_{\nu}J_{\nu}d\nu = \int \alpha_{\nu}S_{\nu}d\nu.$$

Если умножить УПИ на $2\pi d\nu d\omega$ и произвести интегрирование по частоте и направлениям, то имеем:

$$2\pi \frac{d}{ds} \left[\int_0^{\infty} d\nu \oint_{4\pi} I_{\nu} \cos \theta d\omega \right] = \int_0^{\infty} \alpha_{\nu}d\nu \oint_{4\pi} I_{\nu}d\omega - \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu}d\nu \oint_{4\pi} d\omega.$$

Поскольку слева стоит производная от потока излучения, а справа – величина, равная нулю (см. первый вариант записи УЛР), то имеем, что поток в атмосфере звезды должен быть постоянным по всей глубине: $(dF/ds)=0$. Такое УЛР часто используется при корректировке температуры в получаемой модели атмосферы.

Из условия лучистого равновесия можно сделать качественные выводы о температурной стратификации в ЗА. Излученный поток от звезды равен σT_{eff}^4 . Этот поток проходит через каждую горизонтальную поверхность атмосферы. С другой стороны, выше было указано, что поток излучения пропорционален градиенту температуры

$$F = -K\nabla T.$$

Отсюда следует первый вывод о том, что чем больше T_{eff} , тем больше градиент. Далее, уменьшение потока может быть следствием поглощения излучения в среде (но с последующим переизлучением во все стороны). Если это имеет место, для сохранения условия лучистого равновесия градиент температуры должен быть более крутым. А сама величина градиента температуры будет расти с ростом коэффициента поглощения.

Заключительные замечания по этому параграфу такие.

1) Условие постоянства потока справедливо только для плоскопараллельной атмосферы, так как мы использовали соответствующее уравнение переноса.

2) Для сферической атмосферы поток меняется по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния от центра звезды.

3) Постоянство потока относится к интегральной по частоте величине. Монохроматический поток меняется с глубиной. Например, при продвижении вглубь атмосферы максимум излучения смещается в сторону коротких длин волн. Это результат действия закона смещения Вина.

4) Какая форма записи УЛР более удобная для использования? Первые три записи являются записями для данной точки среды (т.е. локальными) и интегральными по частоте. Такие условия лучистого равновесия часто дают результат без полной гарантии выполнения лучистого равновесия. Опыт показывает, что их полезно использовать на малых глубинах звездной атмосферы. Четвертая запись является нелокальной (градиентной) и дифференциальной и хорошо гарантирует выполнения УЛР, но только в глубоких слоях. В общем случае можно использовать линейную комбинацию обеих записей:

$$A \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} (J_{\nu} - S_{\nu}) d\nu + B \left[\int_0^{\infty} \frac{dF_{\nu}}{d\tau_{\nu}} d\nu - F \right] = 0.$$

5) Рассмотрим роль поглощения и рассеяния в лучистом равновесии. Используем ряд уравнений, приведенных ниже.

$$S_{\nu} = \frac{k_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} B_{\nu}(T) + \frac{\sigma_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} J_{\nu},$$

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\nu} J_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} S_{\nu} d\nu, \quad \alpha_{\nu} = k_{\nu} + \sigma_{\nu},$$

$$\int_0^{\infty} (k_{\nu} + \sigma_{\nu}) J_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} (k_{\nu} + \sigma_{\nu}) \left[\frac{k_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} B_{\nu}(T) + \frac{\sigma_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} J_{\nu} \right] d\nu,$$

$$\int_0^{\infty} k_{\nu} J_{\nu} d\nu + \int_0^{\infty} \sigma_{\nu} J_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} k_{\nu} B_{\nu}(T) d\nu + \int_0^{\infty} \sigma_{\nu} J_{\nu} d\nu,$$

$$\int_0^{\infty} k_{\nu} J_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} k_{\nu} B_{\nu}(T) d\nu.$$

Из последнего выражение следует следующий вывод: рассеяние совершенно не участвует в лучистом равновесии. Это понятно, так как эти процессы не связаны с преобразованием энергии: сколько упало излучения на рассеивающие агенты, столько и рассеялось!

Локальное термодинамическое равновесие (ЛТР).

Следует остановиться на этом одном из фундаментальных предположений в теории звездных атмосфер.

Любой физический процесс в равновесной среде с полем излучения компенсируется обратным процессом. Это есть следствие симметрии законов микроскопических процессов относительно обращения во времени. Примеры:

- эффективность поглощения квантов равна эффективности излучения квантов;
- интенсивность излучения в одном направлении равна интенсивности излучения в других направлениях (поле излучения изотропно);
- как следствие, поток излучения равен нулю;
- температура среды везде одинакова (в противном случае происходил бы перенос энергии);
- и т. д.

Итак, если объем V с N идентичными частицами находится в поле излучения с полной энергией E , то вся эта система согласно принципу детального баланса должна стремиться к состоянию полного термодинамического равновесия (ПТР). Строго говоря, такое состояние среды и поля излучения является чистой абстракцией. Мы не будем подробно останавливаться на деталях реализации такого состояния среды и поля излучения: эта проблема будет предметом обсуждения в Пособии-3. Здесь мы лишь остановимся на общих суждениях.

Поле излучение при ПТР.

Представим себе полностью закрытый ящик, имеющий малое отверстие (рис. 29).

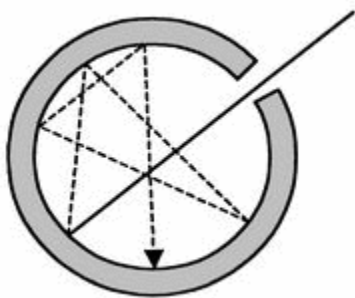


Рис. 29. Простая реализация абсолютно черного тела.

Свет, попавший через это отверстие внутрь ящика, имеет очень малую вероятность выхода обратно. В конце концов, этот свет будет поглощен газом или стенками ящика. Если температура стенок ящика будет сохраняться постоянной, то газ и стенки будут в состоянии полного термодинамического равновесия (ПТР). Если стенки нагревать, то излучение заполнит всю полость. Та часть излучения, которая будет выходить из малого отверстия, не сможет изменить характер равновесного излучения. Это излучение называется излучением аб-

солютно черного тела (АЧТ). Установлено, что при равновесии поле излучения будет только планковским, Подробности о АЧТ см. ниже.

Плазма в ПТР.

В плазме происходят столкновения между частицами (атомами, ионами, молекулами). Если плазма находится в полном термодинамическом равновесии, то число ударов с отдачей энергии должно равняться числу ударов с приобретением частицами энергии. Это приводит к максвелловскому распределению частиц по скоростям. Отсюда и обратное заключение: если в среде преобладают ударные процессы, то плазма будет в полном термодинамическом равновесии.

Имеется много других аргументов, свидетельствующих о том, что ПТР в ЗА не выполняется! Приведем из них некоторые.

1) Температура в ЗА переменна. В большинстве случаев она уменьшается при приближении к поверхности звезды. В хромосферах и в звездном ветре она может и расти (см. рис. 30).

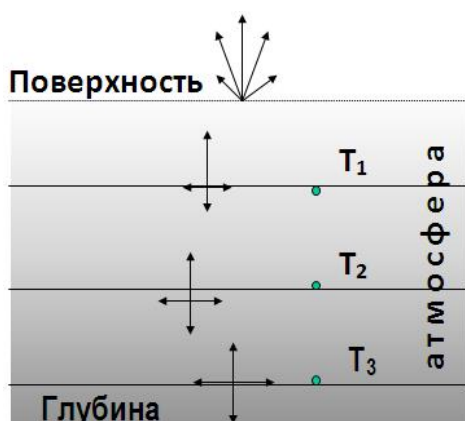


Рис. 30. В ЗА атмосфере температура меняется с глубиной, а поле излучения анизотропно.

2) Поле излучения не изотропно, переменено по глубине и необязательно планковское.

3) В поверхностных слоях средний путь пробега фотона намного больше, чем средний путь пробега частиц. Другими словами, поле излучения связывает состояние ЗА в одной точке с состоянием среды в удаленной точке.

4) Условие полного баланса прямых и обратных процессов – очень жесткое и трудно выполнимое в среде малых плотностей и сильного поля излучения.

Выход из этой ситуации был предложен А. Милном. Звездная атмосфера имеет разную температуру в разных точках. Но можно (без особого обоснования) предположить, что градиенты температуры и плотности вещества не очень велики, а сама плотность велика (чтобы были эффективными соударения частиц). Эти соображения позволяют заключить, что состояние термодинамического равновесия может соблюдаться для данной локальной точки при температуре и концентрации частиц данной точки. Допуская, что температура может быть переменной и поле излучения может

быть непланковским и определяемым через решение уравнения переноса, Милн тем не менее предложил для данной точки атмосферы использовать равновесные соотношения Больцмана-Саха и Максвелла при локальных значениях температуры и других физических величин. Это предположение для состояния среды, называемое локальным термодинамическим равновесием (ЛТР), конечно, существенно упрощает разработку методов анализа ЗА. При этом характеристики поля излучения определяются решением уравнения переноса излучения. Но все же надо подчеркнуть, что предложение Милна является априорным и не имеющим достаточного физического обоснования. Критику ЛТР подхода мы приведем в Пособии 3. Резюме вышесказанного приведено в табл. 1.

	ПТР	ЛТР	не – ЛТР
Температура	Постоянная	переменная	Переменная
Поле излучения	постоянное $B(T)$	переменное	Переменное
Возбуждение атомов	формула Больцмана	формула Больцмана	??????
Ионизация атомов	формула Саха	формула Саха	??????
Скорости частиц	Распределение Максвелла	Распределение Максвелла	Распределение Максвелла (?)

Табл. 1. Характеристики ПТР, ЛТР и не – ЛТР.

Из табл. 1 ясно, что при ПТР нет необходимости в решении уравнения переноса излучения, так как для любой точки среды имеем $I_\nu = B_\nu$. Состояние ЛТР предполагается только для вещества. Характеристики же поля излучения определяются через решение уравнения переноса. Для решения уравнения переноса необходимо знать коэффициенты поглощения и излучения. Они же определяются через населенности уровней. И здесь мы привлекаем опять равновесные населенности по формуле Саха-Больцмана. И тогда соотношения между коэффициентами будет определяться через функцию Планка. Таким образом, при ЛТР имеем:

$$I_\nu \neq B_\nu(T), \quad S_\nu = \varepsilon_\nu / \alpha_\nu = B_\nu(T).$$

Абсолютно черное тело

Нагретые тела имеют частицы,двигающиеся со скоростями при данной кинетической температуре. При столкновениях часть кинетической энергии превращается в энергию электрического и магнитного полей и излучается в виде электромагнитных волн. Типичными примерами таких процессов являются фоторекомбинация и свободно – свободное излучение.

Вообще говоря, тепловое излучение зависит от свойств тела – его размеров, формы, химического состава, теплопроводности и электропроводности. Но есть один случай, когда излучение определяется только температурой. В этом случае излучение называется термодинамически равновесным или излучением абсолютно черного тела (АЧТ).

Выше было указано, что интенсивность излучения АЧТ зависит только от частоты и температуры:

$$I_{\nu} = I_{\nu}(T) = \text{const}, \quad F_{\nu} = 0.$$

Из уравнения переноса излучения имеем:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \varepsilon_{\nu} - \alpha_{\nu} I_{\nu} = 0 \Rightarrow I_{\nu}(T) = \frac{\varepsilon_{\nu}}{\alpha_{\nu}} = B_{\nu}(T).$$

Последняя запись это закон Кирхгофа, а $B_{\nu}(T)$ есть функция Планка, вид которой следует определить. Приведем некоторые следствия этого закона.

1. Если у среды $\alpha_{\nu} = 0$, то она не может и излучать ($\varepsilon_{\nu} = 0$): если тело прозрачно на какой то частоте, то это тело не может и излучать на этой же частоте.
2. Если газ излучает эмиссионную линию ($\varepsilon_{\nu} \neq 0$), то он может создать и линию поглощения ($\alpha_{\nu} \neq 0$) на этой же частоте. Это же справедливо для обратного процесса и на всех частотах.
3. При температуре абсолютного нуля тело не может излучать, т.е. $B_{\nu}(T=0)=0$.

Вид функции Планка можно получить двумя способами:

1. на основе классической теории излучения, подсчитав число фотонов в фазовом пространстве при термодинамическом равновесии. Такой подход осуществил сам Планк.

2. на основе квантовой механики, вычислив свойства излучения в предположении квантования. Это более элегантный подход, реализованный Эйнштейном.

Сам Планк получил свою формулу, сочетая соотношение Релея-Джинса, определяющего число электромагнитных мод на единицу частоты, с величиной средней энергии для всех таких мод, определяемой статистикой Больцмана. При этом он ввел революционную идею о том, что каждая мода содержит целочисленное число квантов энергии. В Дополнении 9 мы приводим подход Планка.

Было установлено, что

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Для красной части спектра будет справедливо приближение Релея-Джинса. Сильное отличие приближения Релея-Джинса от функции Планка в более коротких длинах волн было названо «ультрафиолетовой катастрофой» – бесконечный рост интенсивности с ростом температуры:

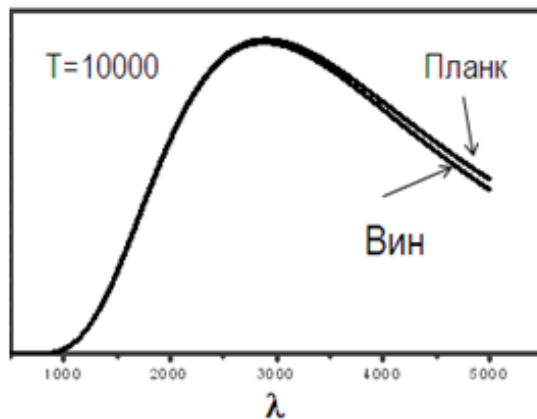


$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \quad \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2k\nu^2 T}{c^2},$$

$$B_\nu(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}.$$

Для синей части справедливо приближение Вина:



$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \quad \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

$$B_\nu(\lambda, T) = \frac{2hc}{\lambda^3} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right).$$

Последующие формулы показывают вывод закона смещения Вина, дающего положение максимума функции Планка:

$$\frac{d}{d\nu} B_\nu(T) = \frac{d}{d\nu} \left[\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right] = B_\nu(T) \left[\frac{3}{\nu} + \frac{-1}{e^x - 1} \frac{x}{\nu} e^x \right],$$

$$\frac{d}{d\nu} B_\nu(T) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{x_{\max} e^{x_{\max}}}{e^{x_{\max}} - 1} \Rightarrow x_{\max} - 3(1 - e^{-x_{\max}}).$$

Последнее уравнение может быть решено методом итераций, который дает следующий результат:

$$x_{\max} = 2.821 = \frac{h\nu_{\max}}{kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = 0.5100.$$

Эта величина λ_{\max} отражает положение максимума в шкале длин волн для функции Планка, записанной в шкале частот. Аналогичные операции могут дать положение максимума функции Планка, но записанной в шкале длин волн:

$$\frac{d}{d\lambda} B_{\lambda}(T) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \right] = \frac{d}{d\lambda} B_{\lambda}(T) = 0 \Rightarrow$$

$$x_{\max} - 5(1 - e^{-x_{\max}}).$$

Последнее уравнение решается также методом итераций. Результат будет таков:

$$x_{\max} = 4.965 = \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = 0.2897 \text{ см град.}$$

Монотонность функции Планка следует из всегда положительной ее производной:

$$\frac{dB_{\nu}(T)}{dT} = \frac{d}{dT} \left\langle \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right\rangle = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2} \frac{h\nu}{kT^2} > 0.$$

Интегрирование функции Планка по частотам дает закон Стефана-Больцмана:

$$B(T) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2}{15} \frac{\pi^4 k^4}{c^2 h^3} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$$

$$\frac{h\nu}{kT} = x, \quad \sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3} = 5.669 \cdot 10^{-4} \text{ эрг/см}^2 / \text{град}^4 / \text{сек.}$$

При выводе этого закона излучения Стефана-Больцмана использовалось следующее выражение:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{n-1}}{e^x - 1} dx = (n-1)! \left[\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \right], \quad 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} \quad \text{при } n = 4.$$

Теория «серой» атмосферы (СА)

При решении физической задачи математическими и вычислительными методами можно использовать разностные схемы высокой точности. Но иногда такие численные методы маскируют важные детали физических процессов. Поэтому иногда целесооб-

разно использовать более простую модель, но которая позволяет получить аналитическое решение. Такой моделью в теории ЗА является «серая» модель ЗА. Исторически эта теория была развита в 1906 году, когда еще не были известны реальные источники непрозрачности звездного вещества. Поэтому в этой теории делается главное допущение: коэффициент поглощения не зависит от частоты (рис. 31). Далее в этой теории предполагается лучистое равновесие, состояние ЛТР, и в итоге решается уравнение переноса излучения. Один из самых главных результатов этой теории это получение температурного распределения температуры с глубиной, которое может явиться стартовым для получения более точного распределения.

Постоянство коэффициента поглощения означает следующее: все решения уравнения переноса излучения становятся "равноправными", т. е. решение уравнения переноса излучения для одной частоты будет верным для любой другой частоты и для суммы по всем частотам. В других многочисленных случаях теория серой атмосферы является сильным упрощением.

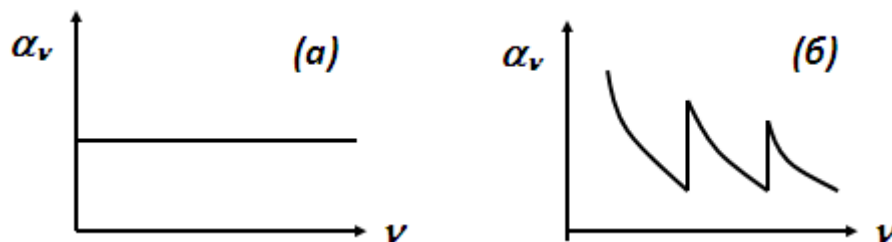


Рис. 31. (а) коэффициент поглощения в серой атмосфере;
(б) коэффициент поглощения в «реальной» атмосфере.

Ниже мы убедимся, что коэффициент поглощения очень сильно зависит от частоты. Однако теория серой атмосферы в некоторых отношениях весьма полезна:

- 1) эта теория является первым полезным приближением к более точной «несерой» атмосфере;
- 2) она позволяет установить очень важные соотношения, например, распределение температуры с глубиной;
- 3) в ряде случаев эта идеализированная модель близка к реальности. Например, она достаточно точна для описания состояния ионизованного газа и излучения (горячие звезды), когда основным источником непрозрачности является электронное рассеяние, которое не зависит от частоты;
- 4) «серая» атмосфера хорошо описывает атмосферы звезд солнечного типа, где коэффициент поглощения слабо зависит от частоты.

Для последующих рассуждений полезно записать функцию источника в «серой» атмосфере. Введем обозначения:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu, \quad \varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu} d\nu.$$

Далее проинтегрируем уравнение переноса излучения по частотам. Тогда

$$\cos \theta \frac{dI}{dz} = \alpha I - \varepsilon, \Rightarrow \cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad d\tau = \alpha dz, \quad S = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Условие лучистого равновесия дает следующие выражения:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu} d\nu = \alpha \int_0^{\infty} J_{\nu} d\nu \Rightarrow \varepsilon = \alpha J \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\alpha} = J = S.$$

В итоге, нам необходимо решить совместно два уравнения

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - S, \Leftrightarrow \cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - J, \quad (10)$$

$$S = J = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} I d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} I \sin \theta d\theta.$$

Для решения этой пары уравнений были разработаны приближенные методы разной точности.

Приближенные методы решения уравнения переноса: основные идеи

В настоящее время разработка методов решения уравнения переноса является отдельным разделом математики. В основе каждого метода обычно лежат различные предпосылки, и поэтому область применения конкретного метода может быть ограниченной. Например, различные подходы реализуются для таких случаев:

- оптически тонкий и оптически толстый случаи;
- изотропное и анизотропное поле излучения.

При разработке конкретного метода обычно следует предусматривать возможность его использования для численной реализации при расчетах. Но как указывалось выше, особый интерес представляют те приближенные методы, которые позволяют получить аналитические решения. Исторически первые методы были основаны на так называемом "двухпоточковом приближении", предложенном Шустером и Шварцшильдом в 1905-1906 годах. Суть приближения заключается в том, что реальная анизотропная интенсивность рассматривается отдельно в каждой полусфере. При этом предполагается, что в каждой полусфере интенсивность является изотропной, но разной по величине в разных полусферах (см. рис. 32). Показательными в этом отношении являются три метода, суть которых такая:

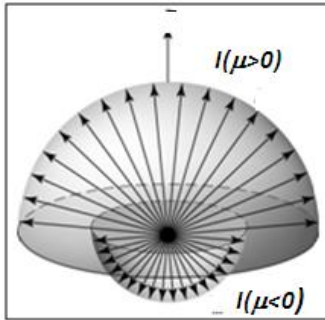


Рис. 32. «Двухпотоковое приближение»: анизотропное излучение представляется как изотропное по двум полусферам.

1. Метод Шварцшильда - Шустера основан на:

- усреднении интенсивностей по нижней и верхней полусферам,
- выносе из под интеграла среднего значения $\cos\theta = \pm 1/2$, например,

$$\int_0^{\pi/2} I \sin\theta \cos\theta d\theta \approx \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} I \sin\theta d\theta.$$

2. Метод Милна-Эддингтона – основан на:

- выносе среднего значения $\cos^2\theta = 1/3$ по сфере, например,

$$\int_0^{\pi} I \sin\theta \cos^2\theta d\theta \approx \frac{1}{3} \int_0^{\pi} I \sin\theta d\theta.$$

3. Метод Чандрасекара основан на представлении интеграла квадратурой

$$\int_{-1}^1 I(\mu) d\mu \approx \sum_i a_i I(\mu_i), \quad \mu = \cos\theta.$$

Следует сказать, что различие результатов, полученных разными приближенными методами, не очень значительно - оно порядка множителя единица.

Для рассмотрения "двухпотокового" приближения напомним формулы для моментов для интенсивности:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu, \quad H = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu, \quad K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu.$$

Запишем первый момент для интенсивности, интегрируя уравнение (10) по μ :

$$\int_{-1}^1 \mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} d\mu = \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu - \int_{-1}^1 J d\mu \rightarrow 2 \frac{dH}{d\tau} = 2J - 2J = 0 \rightarrow \frac{dH}{d\tau} = 0.$$

Умножив уравнение (10) на μ и интегрируя, получаем следующее уравнение:

$$\int_{-1}^1 \mu^2 \frac{dI(\mu)}{d\tau} d\mu = \int_{-1}^1 \mu I(\mu) d\mu - \int_{-1}^1 \mu J d\mu \rightarrow \frac{d(2K)}{d\tau} = 2H - 0 \rightarrow \frac{dK}{d\tau} = H.$$

В итоге имеем два соотношения:

$$K = H\tau + c_1, \quad J = 3H\tau + c_2. \quad (11)$$

При лучистом равновесии поток по всей атмосфере постоянен. Поэтому первая запись отражает важный факт: что лучистое давление в атмосфере растет линейно с глубиной.

Для получения окончательного решения необходимо:

- а) знать зависимость интенсивности от μ , т.е. знать $I(\tau, \mu)$;
- б) вычислить $J(\tau)$;
- в) использовать это J для нахождения нового значения интенсивности.

Для реализации первого пункта Шустер и позднее Эддингтон использовали "двухпотокое приближение". Введем величины

$$I(\tau, \mu) = I_+(\tau) \quad \text{при } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{верхняя полусфера});$$

$$I(\tau, \mu) = I_-(\tau) \quad \text{при } 0 > \mu > -1 \quad (\text{нижняя полусфера}).$$

Тогда нетрудно показать, что моменты для интенсивности будут определяться как

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu = \frac{1}{2}(I_+ + I_-), \quad H = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu = \frac{1}{4}(I_+ + I_-),$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu \approx \frac{1}{6}(I_+ + I_-) = \frac{1}{3}J, \quad (\text{среднее } \mu^2 = 1/3). \quad (12)$$

Последнее важное соотношение точно выполняется на больших глубинах, где поле излучения изотропно. Предположим, что оно выполняется и на других глубинах по всей атмосфере. Эта идея появилась таким образом. Применительно к звездным атмосферам и для анизотропного излучения Эддингтон обратил внимание на то, что отклонение фактора $f=J/K$ от значения $1/3$ является величиной второго порядка малости. Другими словами, значение $1/3$ означает, что излучение можно рассматривать изотропным отдельно (см. рис. 30) для выходящего при $\mu > 0$ и входящего излучения при $\mu < 0$.

Для определения постоянных в равенствах (11) используем верхнее граничное условие - отсутствие падающего излучения:

$$\tau = 0 \rightarrow I_-(\tau = 0) \rightarrow 2H = H\tau + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = 2H.$$

Тогда с учетом (12) имеем, что

$$J = 3H\left(\tau + \frac{2}{3}\right) = 3\frac{F}{4\pi}\left(\tau + \frac{2}{3}\right) = \frac{F}{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\tau\right). \quad (13)$$

Мы получили окончательное решение в первом приближении. При необходимости можно сделать следующую итерацию: решить уравнение переноса излучения (10) с известной величиной J (формула 13) и т.д. Вторая итерация при $J=3H(\tau+2/3)$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \mu > 0 \quad I(\tau, \mu) &= \int_{\tau}^{\infty} 3H\left(t + \frac{2}{3}\right) e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} = 3H\left(\tau + \frac{2}{3} + \mu\right), \\ \mu < 0 \quad I(\tau, \mu) &= -\int_0^{\tau} 3H\left(t + \frac{2}{3}\right) e^{-\frac{\tau-t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} = 3H\left[\tau + \frac{2}{3} + \mu - \left(\mu + \frac{2}{3}\right)e^{\frac{\tau}{\mu}}\right] \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно, вместо изотропной интенсивности в каждой полусфере мы получили анизотропное распределение интенсивности. Степень неизотропности разная на разных глубинах. Таким образом, во второй итерации зависимость интенсивности от μ стало линейной (см. рис. 33). Итерации можно продолжить, но расчеты показывают, что уже во втором приближении полученный результат не сильно отличается от более точного (см. ниже метод Чандрасекара).

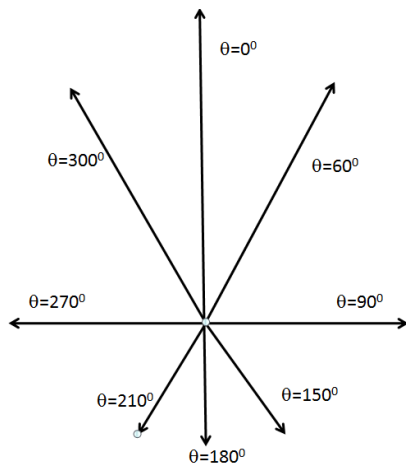


Рис. 33. Распределение интенсивности по углам при значении глубины $\tau=1$.

Отметим, что другой приближенный метод Швацшильда-Шустера дает результат, мало отличающийся от изложенного метода Эддингтона:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{F}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \tau\right).$$

Выведем еще два полезных выражения – соотношения Эддингтона-Барбье. Для выходящих интенсивности и потока мы имеем

$$I(\tau=0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu}, \quad F(\tau=0) = 2\pi \int_0^1 I(\tau=0, \mu) \mu d\mu. \quad (15)$$

С другой стороны, функция источника равна

$$S(\tau) = \frac{F}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau\right), \quad S(\tau) = \frac{F}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \tau\right).$$

Это есть линейная функция вида $S(\tau)=a+b\tau$. Подставляя это выражение в (15), имеем:

$$I(\tau=0, \mu) = a + b\mu, \quad F(\tau=0) = 2\pi \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \right) = \pi \left(a + \frac{2}{3}b \right).$$

Следует очень полезный вывод: выходящая интенсивность равна функции источника на глубине $\tau = \mu$. Выходящий поток определяется функцией источника на глубине $\tau = 2/3$. Соотношение Эддингтона-Барбье позволяет в первом приближении оценить выходящее излучение.

Метод Чандрасекара. Исторически этот метод был предложен Виком в 1943 году при рассмотрении вопроса о диффузии и годом спустя был развит Чандрасекаром. Исходным уравнением является следующий вид:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\mu, \tau) d\mu.$$

Точность численного интегрирования определяется числом точек разбиений, соответствующими весами и видом подынтегральной функции $I(\mu, \tau)$. На поверхности все излучение идет вверх ($\mu > 0$), и отсутствует входящее излучение ($\mu < 0$). Это отражено линиями на правом графике рис. 34. На промежуточных глубинах интенсивность вверх больше, так как она определяется большей оптической глубиной от ∞ до τ . Интенсивность вниз будет меньше, так как она определяется меньшим слоем ($\tau=0, \tau$). Излучение при очень больших глубинах будет изотропным: излучение вверх и вниз определяются очень большими толщами сверху и снизу.

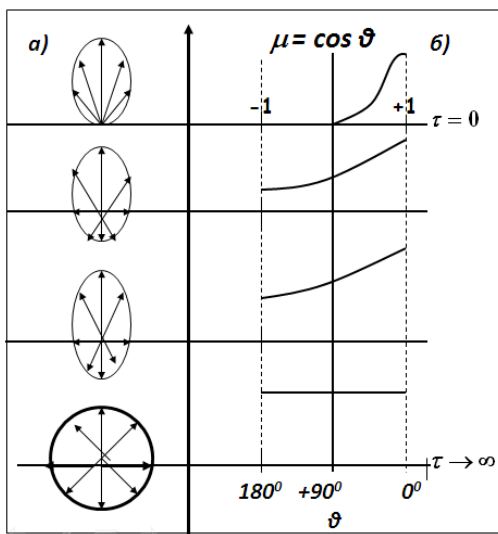


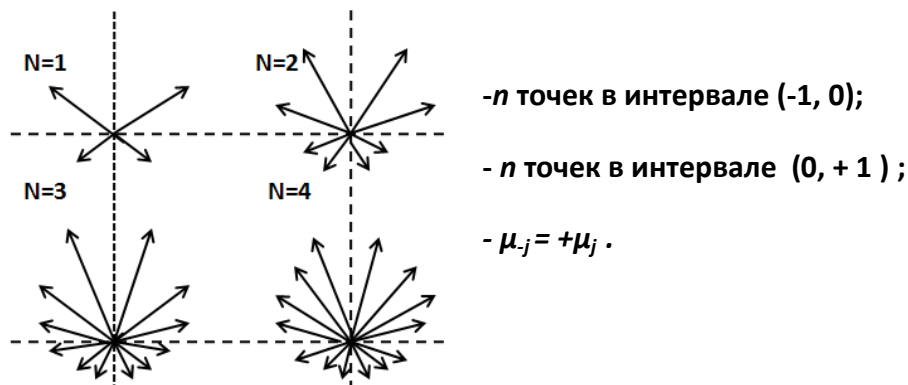
Рис. 34. а) Анизотропное поведение излучения на разных глубинах. б) Зависимость интенсивности от угла.

При описанном поведении интенсивности важен, как указывалось выше, выбор метода квадратуры:

1) выбор точек деления i и весов a_i :

$$\int_{-1}^{+1} I(\mu, \tau_v) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j I(\mu_j, \tau_v).$$

2) кроме того, величина μ меняется в интервале $(-1, +1)$. Поэтому желательно использовать квадратуру с симметричным выбором точек деления, как было предложено Гауссом:



3) Тогда

$$\int_{-1}^{+1} I(\mu, \tau_v) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j I(\mu_j, \tau_v), \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

Как показали Вик и Чандрасекар, этим условиям хорошо удовлетворяет метод интегрирования Гаусса, в котором :

- точки деления это корни полиномов Лежандра:

$$P_m(\mu) = \frac{1}{2^m \mu!} \frac{d^m}{d\mu^m} (\mu^2 - 1)^m, \quad P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu,$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mu_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$- \quad P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^2 - 3\mu).$$

- веса определяются из следующего выражения:

$$a_{\mu} = \frac{2}{(1 - \mu_{\mu}^2) [P'_m(\mu_{\mu})]^2}. \quad a_{\pm 1} = 1.$$

Приведем пример применения и точности квадратуры Гаусса, используя табл.2.

- Возьмем для примера интегрируемую функцию

$$\int_1^5 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2e^{\frac{1}{2}x} \Big|_1^5 = 21.067545.$$

n	точки деления t_j	веса a_j	уровень точности
2	-0.57735 02692	1	3
	0.57735 02692	1	
3	-0.77459 66692	0.55555 55556	5
	0	0.88888 88889	
	0.77459 66692	0.55555 55556	
4	-0.86113 63116	0.34785 48451	7
	-0.33998 10436	0.65214 51549	
	0.33998 10436	0.65214 51549	
	0.86113 63116	0.34785 48451	
5	-0.90617 98459	0.23692 68851	9
	-0.53846 93101	0.47862 86705	
	0	0.56888 88889	
	0.53846 93101	0.47862 86705	
	0.90617 98459	0.23692 68851	

Табл. 2. Веса и точки деления в квадратуре Гаусса.

- Введем новую переменную

$$t = \frac{2x - (a + b)}{b - a} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2t + 3.$$

- Приближенное решение (при 3-х точках деления):

$$\begin{aligned} \int_1^5 e^{\frac{1}{2}x} dx &\approx \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}(2t+3)} 2dt = 2 \int_{-1}^1 e^{t+\frac{3}{2}} dt \\ \int_{-1}^1 e^{t+\frac{3}{2}} dt &= (0.55555)e^{-0.77459+\frac{3}{2}} + (0.88889)e^{0+\frac{3}{2}} + \\ &+ (0.55555)e^{0.77459+\frac{3}{2}} = 10.533346 \\ \int_1^5 e^{\frac{1}{2}x} dx &\approx 2 * (10.533346) = 21.066691 \end{aligned}$$

Ошибка численного интегрирования = 4×10^{-3} .

Общий вид решаемых уравнений такой:

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^{i=n} a_i I_i, \quad I_i = I_i(\mu_i, \tau).$$

В простом случае двух точек деления имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_1}{d\tau} = I_1 - \frac{1}{2}(I_1 - I_{-1}), \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_{-1}}{d\tau} = I_{-1} - \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}).$$

Эта линейная система. Не вдаваясь в подробности, дадим только результат решения:

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F[\tau + q(\tau)].$$

Вид функции $q(\tau)$ (называемой функцией Хопфа) был получен несколькими авторами. Для численных расчетов обычно применяют следующую формулу:

$$q(\tau) = q(\infty) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{e^{-\tau/\mu}}{H(u)Z(u)} du,$$

$$q(\infty) = \frac{\int_0^1 H(u)u^2 du}{\int_0^1 H(u)u du}, \quad H(u) = \frac{\exp\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \arctan(u \tan \theta)}{1 - \mathcal{H} \cos \theta} d\theta\right]}{\sqrt{1+u}},$$

$$Z(u) = \left[1 - \frac{u}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]^2 + \frac{1}{4} \pi^2 u^2.$$

При различном числе точек деления значения функции Хопфа такие:

$$\begin{aligned} n=1 \quad q(\tau) &= 1/\sqrt{3}, \\ n=2 \quad &= 0.694025 - 0.116675e^{-1.97203\tau}, \\ n=3 \quad &= 0.703899 - 0.101245e^{-3.20295\tau} - 0.025302e^{-1.22521\tau}, \\ n=4 \quad &= 0.70692 - 0.08392e^{-4.45808\tau} - 0.03619e^{-1.59178\tau} - 0.00946e^{-1.10319\tau}. \end{aligned}$$

Ошибки в значениях $q(\tau)$ для $n=1, 2, 3, 4$ составляют 9, 4.16, 2.7 и 2 процентов.

Графическое представление функции приведено на рис. 35. Видно, что наибольшие различия между приближенным и точным решением имеются для малых оптических глубин. Решение Эддингтона лежит между двумя предельными и точными решениями.

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577... \quad q(\infty) = 0.710...$$

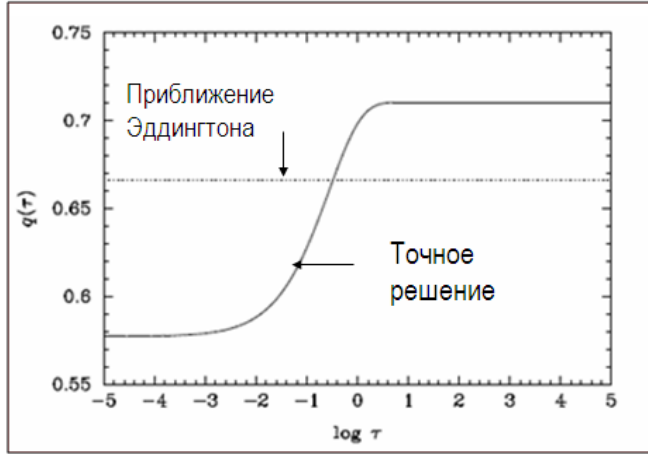


Рис. 35. Вид функции Хопфа.

В дальнейшем нам потребуется знать входящую и выходящую интенсивность. Метод Чандрасекара для случая $n=1$ дает следующий результат

$$I_1(\tau) = \frac{3}{4} F \left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}} + Q \right), \quad I_{-1}(\tau) = \frac{3}{4} F \left(\tau - \frac{1}{\sqrt{3}} + Q \right). \quad (16)$$

Для случая $\tau=0$ и отсутствия падающего на поверхность излучения $I_{-1}(\tau=0)=0$ метод дает значение $Q=1/\sqrt{3}$.

Распределение температуры в серых атмосферах. Предположим ЛТР и используем интегральные по частоте величины:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} = S_\nu = B_\nu(T), \quad \varepsilon = \int \alpha_\nu B_\nu(T) d\nu = \alpha \frac{ac}{4\pi} T^4,$$

$$S = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{ac}{4\pi} T^4(\tau), \quad \frac{ac}{4\pi} T^4(\tau) = F \left(\frac{3}{4} \tau + \frac{1}{2} \right).$$

Приравняем интегральный поток F потоку АЧТ с эффективной температурой T_{eff} . Тогда имеем:

$$F = \frac{H}{\pi} = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi}, \quad T^4(\tau) = T_{eff}^4 \left[\frac{3}{4} \tau + \frac{1}{2} \right], \quad T^4(\tau) = T_{eff}^4 [\tau + q(\tau)].$$

Согласно второй формуле на глубине $\tau = 2/3$ температура равна эффективной температуре. Фотон, излученный на этой глубине, имеет вероятность выхода с поверхности в $\exp(-2/3) \approx 0.5$. На глубине $\tau=0$ температура равна 0.8 эффективной температуры. Графическое представление для разных T_{eff} дано на рис. 36.

Отметим, что установление закона распределения температуры с глубиной это главное достижение теории серых атмосфер!

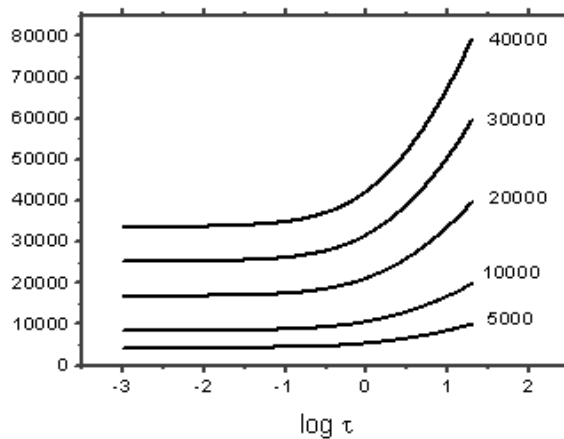


Рис. 36. Распределение температуры с глубиной при различных T_{eff} .

Рассмотренные выше 3 метода решения УП не имеют ограничений для их применения для несерых атмосфер. Первые два метода не обладают высокой точностью, поэтому они мало применимы в астрофизических исследованиях. Метод Чандрасекара дает высокую точность. Кроме того, его легко программировать. Поэтому он использовался продолжительное время, пока не появились другие более эффективные численные методы решения уравнения переноса излучения.

Проверка и приложения теории серых атмосфер. Естественно, что тестовым случаем является Солнце. Для Солнца мы можем эмпирически определить закон потемнения диска, изменение I_ν с длиной волны и распределение температуры с глубиной. Основанием для этого является то, что для Солнца мы наблюдаем его диск (рис. 37).

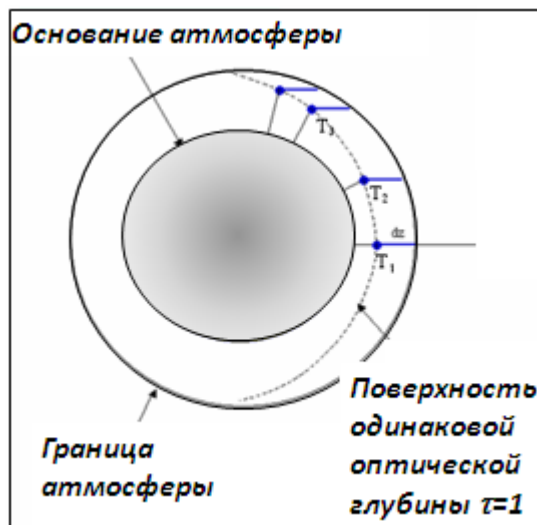


Рис. 37. Поверхность одинаковой оптической толщины при просмотре диска Солнца. Наблюдатель находится слева.

Из рисунка ясно, что если мы возьмем конкретную величину линейной протяженности dz , то взгляд наблюдателя при просмотре разных точек диска будет проникать до разных глубин, где температура будет также разной. Эмпирическое определение распределения температуры в солнечной атмосфере можно осуществить следующим образом:

- наблюдаем $I_\nu(\tau=0, \vartheta)$ для разных ϑ ;
- используем соотношение Эддингтона-Барбье

$$I_\nu(0, \vartheta) = a + b \cos \vartheta \quad (17)$$

и определяем по наблюдениям постоянные a и b ;

- полагая, что $S_\nu(\tau) = a + b\tau = B_\nu[T(\tau)]$, находим распределение $T(\tau)$.

Сравнение полученного «эмпирического» закона распределения температуры и закона для серого случая приведено на рис. 38.

Закон потемнения диска может быть получен, используя выражение (17):

$$\alpha = \frac{I(\tau = 0, \mu = 1)}{I(\tau = 0, \mu = 0)} = \frac{a + b}{a} = 2.5, \quad \frac{I(\tau = 0, \mu)}{I(\tau = 0, 1)} = 0.4 + 0.6\mu \quad (\text{М-Э}).$$

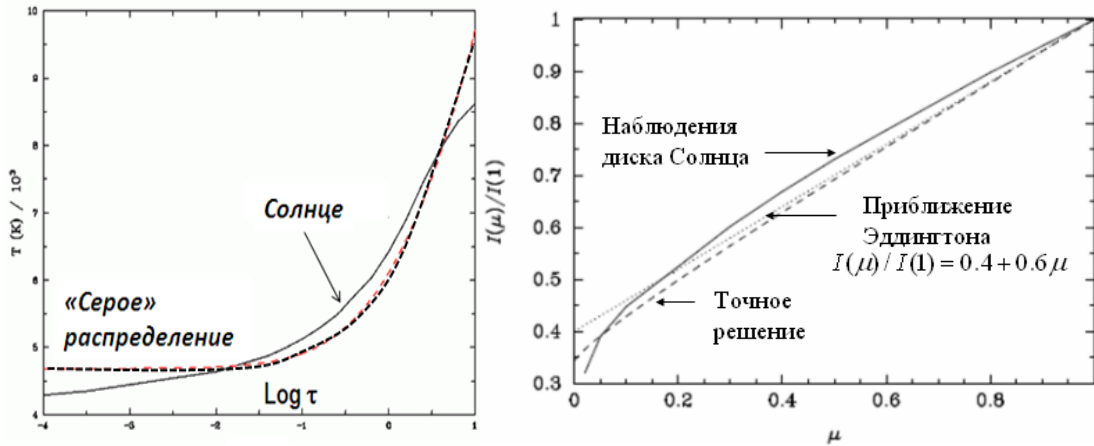


Рис. 38. Слева: сравнение «серого» и эмпирического распределения температуры в атмосфере Солнца. Справа: сравнение «серого» и эмпирического потемнения диска Солнца.

Если использовать теорию «серых» атмосфер как начальное приближение для расчета более реалистичных «несерых» атмосфер, то как выбрать средний (независимый от частоты) коэффициент поглощения α , если известны коэффициенты поглощения α_ν в зависимости от частоты? Есть несколько вариантов определения α .

- Планковское среднее определяется очень просто:

$$\alpha_P = \frac{\int_0^\infty \alpha_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu}.$$

Как видно, планковское среднее является арифметическим средним. Поэтому при появлении нового агента поглощения оно легко вычисляется путем добавления α для этого агента. Но астрофизики предпочитают использовать так называемое среднее Росселанда:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu = \frac{1}{\alpha_R} \int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu \Rightarrow \frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}.$$

Вывод этой формулы можно найти в Дополнении. Как видно, это среднее является гармоническим средним. Поэтому при добавлении нового агента поглощения возникает необходимость перевычисления среднего Росселанда заново. Имеются большие таблицы расчетов среднего Росселанда (см. Iglesias, Rogers 1996 Aph. J., vol. 464, p. 943). График одной из таких таблиц приведен на рис. 39.

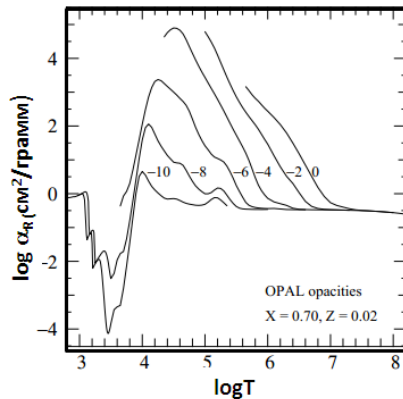


Рис. 39. Среднее Росселанда, рассчитанное для солнечного содержания. Кривые помечены значениями $\log \rho$ (грамм/см³).

Методы решения уравнения переноса

Вышеописанные методы в настоящее время практически не применяются, поскольку были разработаны более мощные численные методы, реализованные в виде компьютерных программ. Детальное описание этих методов выходит за рамки данного Пособия, поэтому мы ограничимся лишь их перечнем.

- 1) Метод Фортри. Описанные выше методы Швацшильда-Шустера и Милна-Эддингтона основаны на предположении изотропности излучения отдельно в каждой из полусфер (нижней и верхней). Фортри разработал метод, освобожденный от этого предположения и легко реализуемый численно на компьютерах. Его краткое описание дано в Пособии-3. Более подробно он описан в нашей монографии.
- 2) Метод Райбики является переформулировкой метода Фортри. Этот подход позволил более детально учесть рассеяние в линиях.
- 3) Метод лямбда итерации. Он используется для широкого круга задач: от точного учета рассеяния в функции источника до решения всех уравнений теории моделирования звездных атмосфер. В простом варианте функция источника (7) представляется в интегральном виде как

$$S = \gamma B + (1 - \gamma) \Lambda[S]$$

и ищется итеративно по следующей схеме:

$$S_{n+1} = \gamma B + (1 - \gamma) \Lambda[S_n].$$

Эта схема может быть усовершенствована вводом приближенного лямбда оператора Λ^* . Тогда

$$S_{n+1} = \gamma B + (1 - \gamma) \Lambda^* [S_{n+1}] + (\Lambda - \Lambda^*) [S_n]$$

Приближенный оператор действует на новое значение функции источника, разность операторов – на значение из предыдущей итерации. Эта процедура существенно улучшает сходимость итераций.

4) Метод коротких характеристик. Он реализуется в несколько шагов.

- используем формальное решение (8) уравнения переноса излучения и запишем для трех соседних разных глубин τ_{d-1} , τ_d и τ_{d+1} выражения для выходящей ($\mu > 0$) и входящей интенсивности ($\mu < 0$):

$$I(\tau_d, \mu) = I(\tau_{d+1}, \mu) e^{-\frac{\tau_{d+1} - \tau_d}{\mu}} + \int_{\tau_d}^{\tau_{d+1}} S(t) e^{-\frac{t - \tau_d}{\mu}} \frac{dt}{\mu}, \quad \mu > 0,$$

$$I(\tau_d, \mu) = I(\tau_{d-1}, \mu) e^{-\frac{\tau_d - \tau_{d-1}}{(-\mu)}} + \int_{\tau_{d-1}}^{\tau_d} S(t) e^{-\frac{\tau_d - t}{\mu}} \frac{dt}{(-\mu)}, \quad \mu < 0,$$

- далее целесообразно перейти от оптической глубины dt вдоль нормали к оптической глубине $d\hat{t}$ вдоль движения кванта:

$$d\hat{t} = \frac{dt}{|\mu|}, \quad d\hat{t} \text{ растет вдоль движения входящей интенсивности } (\mu < 0),$$

$d\hat{t}$ уменьшается вдоль движения выходящей интенсивности ($\mu > 0$).

- тогда

$$I(\hat{t}_d) = I(\hat{t}_{d+1}) e^{-\Delta\hat{t}_{d+1/2}} + \int_{\hat{t}_d}^{\hat{t}_{d+1}} S(t) e^{-(\hat{t} - \hat{t}_d)} d\hat{t},$$

$$I(\hat{t}_d) = I(\hat{t}_{d-1}) e^{-\Delta\hat{t}_{d-1/2}} + \int_{\hat{t}_{d-1}}^{\hat{t}_d} S(t) e^{-(\hat{t}_d - \hat{t})} d\hat{t}. \quad \Delta\tau_{d\pm 1/2} = |\hat{t}_d - \hat{t}_{d\pm 1}|$$

- теперь функцию источника в районе \hat{t}_d аппроксимируем какой либо функцией, которая позволяет вычислить аналитически последние интегралы. Простой пример

- использование полинома:

$$S(\hat{t}) = a_d^0 + a_d^1 \hat{t} + a_d^2 \hat{t}^2 + \dots \quad \hat{t}_{d-1} < \hat{t} < \hat{t}_d.$$

Подстановка в приведенные выше интегралы позволяют определить коэффициенты a_d^i .

Все эти операции проводятся для всех глубин.

Коэффициенты непрерывного поглощения

Непрерывный спектр образуется в результате процессов поглощения (и излучения) энергии в плазме 3А (см. рис. 40). Поэтому знание коэффициентов поглощения крайне необходимо. При прохождении излучения через среду уменьшение его интенсивности (потока) в направлении к наблюдателю происходит за счет следующих процессов.

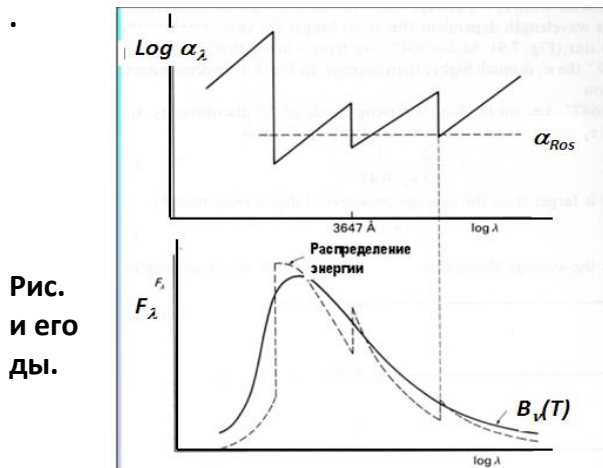


Рис.
и его
ды.

40. Поведение коэффициента поглощения
отражение в выходящем излучении звезд.

1. Фотоионизация (связанно-свободные переходы или $b-f$ переходы). Обратные процессы это фоторекомбинация.
2. Поглощение фотона при свободно-свободных переходах (или $f-f$ переходах). Эти процессы возможны лишь при наличии ионов. Обратные процессы это тормозное излучение.
3. Рассеяние на свободных электронах или на атомах (молекулах).
4. Фотовозбуждение – переход с нижних уровней на более высокие с поглощением квантов. Обратные процессы – фотодевозбуждение.

Первые три механизма вызывают изменение в непрерывном спектре. Четвертый процесс связан с образованием линий поглощения. Его мы будем рассматривать в Пособии 2.

Непрозрачность нейтрального водорода ($b-f$ переходы).

Водород является самым обильным элементом в атмосферах звезд - от самых холодных до самых горячих. Но роль нейтрального водорода в общем поглощении важна лишь в звездах классов A, G, F. Это связано с тем, что у горячих звезд водород уже ионизован, а у холодных звезд источниками поглощения являются более важные агенты, чем нейтральный водород.

Физика рассматриваемого процесса заключается в следующем. Связанный электрон, вращающийся вокруг ядра по эллиптической орбите, не имеет достаточной энергии, чтобы преодолеть кулоновское притяжение. Но если он приобретет энергию за счет

поглощения кванта, то он может перейти в свободное состояние, двигаясь уже по гиперболической орбите. При этом поглощенная энергия тратится на преодоление энергии связи электрона с ядром (энергии ионизации χ) и на сообщение электрону кинетической энергии, т.е. должно выполняться условие

$$h\nu \geq \chi_n + mV_e^2/2.$$

Такие процессы могут, естественно, происходить и с другими атомами и ионами.

В 1923 году Крамерс Х. на основе классической физики получил формулу для поглощения атомом водорода, которая используется и по настоящее время. Вывод формулы приведен в Дополнении. Ее вид таков:

$$a_{\nu n}^{bf} = \frac{2^6}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^4 m e^{10} Z^4}{ch^6 n^5 \nu^3} g_{\nu n}, \quad a_{\lambda n}^{bf} = \frac{1.044 * 10^{-26} \lambda^3 (A)}{n^5} g_{\lambda n},$$

только при $\lambda \leq \lambda_n$, если $\lambda > \lambda_n$, то $a_{\nu n} = 0$.

Здесь m – масса электрона, g – фактор Гаунта, (см. ниже). Размерность коэффициента – см^2 . Графическое представление дано на рис. 41.

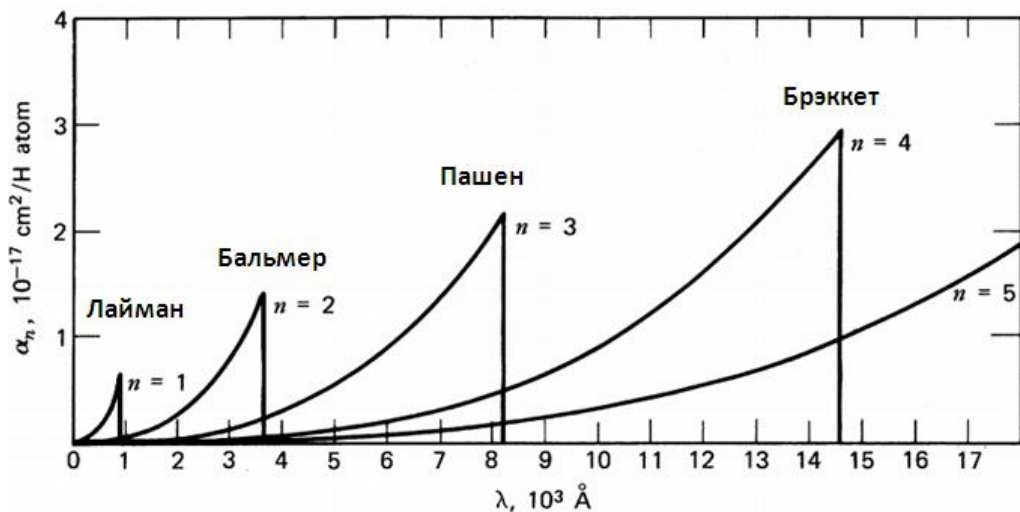


Рис. 41. Коэффициент поглощения нейтрального водорода в расчете на 1 атом.

Из рисунка видно, что для выбранной длины волны суммарный по уровням коэффициент поглощения должен быть вычислен с учетом того, с какого уровня начинается фотоионизация. Например, при $\lambda=6000 \text{ Å}$ следует учитывать поглощение при переходах с уровней, начиная с уровня $n=3$. В этой области образуется непрерывный спектр А-звезд.

Ниже приведены рабочие формулы для расчета коэффициентов поглощения:

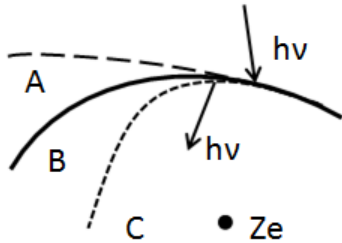
$$\begin{aligned}
a_{\lambda}(n=1) &= 6.3 * 10^{-18} \left(\frac{\lambda}{912} \right)^3 \frac{g_{\lambda 1}}{0.80}, \quad \lambda < 912 \text{ \AA}, \\
a_{\lambda}(n=2) &= 1.4 * 10^{-17} \left(\frac{\lambda}{3646} \right)^3 \frac{g_{\lambda 2}}{0.89}, \quad \lambda < 3646 \text{ \AA}, \\
a_{\lambda}(n=3) &= 2.2 * 10^{-17} \left(\frac{\lambda}{8206} \right)^3 \frac{g_{\lambda 3}}{0.80}, \quad \lambda < 8206 \text{ \AA}, \\
g(912) &\approx 0.80, \quad g(3646) \approx 0.89, \quad g(8206) \approx 0.92.
\end{aligned} \tag{18}$$

Факторы Гаунта являются поправочными множителями к классическим формулам Крамерса за счет квантовых эффектов. Эти множители близки к 1. Имеются обширные расчеты этих факторов, но обычно используются следующие формулы:

$$\begin{aligned}
g_{\lambda n}^{bf} &= 1 - 0.3456 * (\lambda R)^{-1/3} \left[\frac{\lambda k T}{hc} + 0.5 \right], \\
g_{\lambda n}^{ff} &= 1 + 0.3456 * (\lambda R)^{-1/3} \left[\frac{\lambda R}{n^2} - 0.5 \right], \\
R &= 109680 \text{ см}^{-1} - \text{постоянная Ридберга}.
\end{aligned}$$

Непрозрачность при f - f переходах.

Суть таких процессов заключается в том, что свободный электрон, двигаясь в плазме по гиперболической орбите определенного радиуса кривизны, может пройти около



силового поля, созданным ионом с зарядом Ze (см. рис.). В результате взаимодействия с этим полем электрон может изменить свою первоначальную орбиту (кривая В) и увеличить свою кинетическую энергию при условии поглощения кванта. Теперь его (кривая А) орбита будет более удалена от центра Ze . Понятно, что такие процессы приводят к нагреву среды за счет уменьшения энергии излучения.

Коэффициент поглощения при таких процессах зависит от скорости свободного электрона (чем меньше скорость, тем вероятней поглощение фотона, так как длительность близкого прохождения около иона будет продолжительней). Вклад в коэффициент поглощения от прохождения одного электрона, имеющего скорость V_e , равен

$$a_{\nu}(V_e) = \frac{4\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3} m_e^2 c h} \frac{1}{\nu^3 V_e} g^{ff}.$$

После интегрирования по максвелловскому распределению скоростей электронов будем иметь (в расчете на 1 ион и на 1 электрон)

$$a_{\nu}^{ff} = \frac{\sqrt{32\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{ch (km_e^3)^{1/2}} \frac{1}{\nu^3 \sqrt{T}} g^{ff}, \quad g^{ff} \approx 1.$$

При этом использовалось соотношение

$$\left\langle \frac{1}{V_e} \right\rangle = \left(\frac{2m_e}{\pi k T} \right)^{1/2}.$$

В предельных случаях формулы будут такими:

$$h\nu / KT \gg 1 \rightarrow a_{\nu}^{ff} = 3.7 * 10^8 \frac{Z^2}{T^{1/2} \nu^3} - \text{для виновской области,}$$

$$h\nu / KT \ll 1 \rightarrow a_{\nu}^{ff} = 0.018 \frac{Z^2}{T^{3/2} \nu^2} - \text{для области Релея – Джинса.}$$

Приведенные формулы были получены также Крамерсом и уточнены Гаунтом. Роль таких $f-f$ переходов в поглощении меньше, чем при $b-f$ переходах (рис. 42).

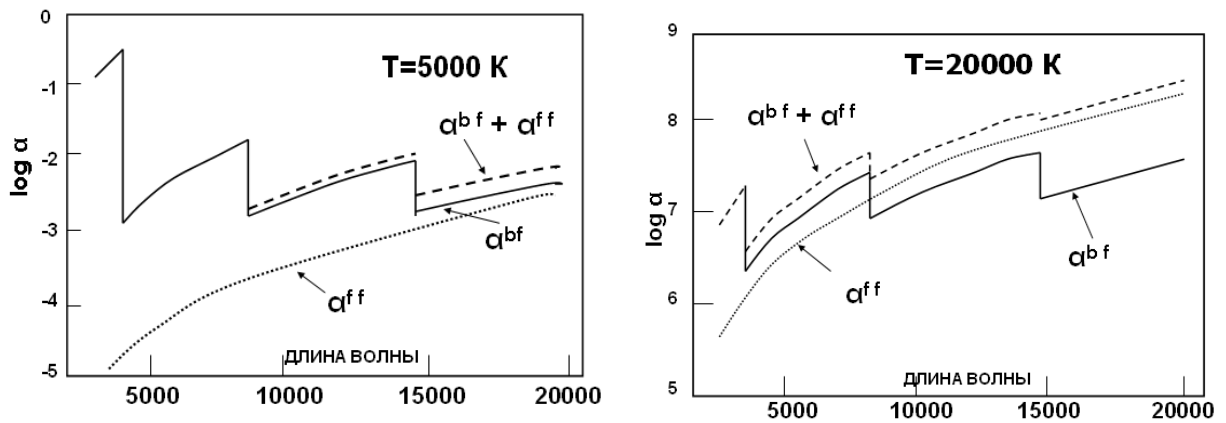


Рис. 42. Сравнение вклада $f-f$ и $b-f$ поглощения нейтрального водорода при разных температурах.

Коэффициент излучения при фоторекомбинации ($f-b$ переходы).

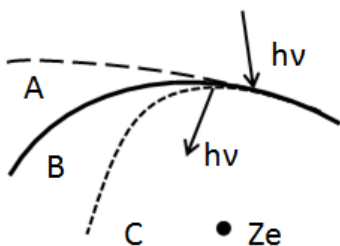
При обратных переходах, когда свободный электрон соединяется с ионом, выделяется энергия излучения с коэффициентом излучения ε . Его величина определяется следующей формулой:

$$\varepsilon_{\nu}^{fb} = \frac{2h\nu^3}{c^2} N_e N_{ion} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \alpha_{\nu}^{bf} e^{-\frac{h\nu - \chi_n}{kT}} \quad (h\nu > \chi_n)$$

Так как $\alpha_{\nu}^{bf} \sim \nu^{-3}$, то в формуле зависимость от частоты будет только в экспоненте. Таким образом, максимум излучения достигается при $h\nu \approx \chi_n$. Здесь χ_n есть потенциал ионизации с уровня n .

Коэффициент излучения при $f-f$ переходах.

При прохождении свободного электрона около заряженного иона между этими частицами происходит взаимодействие с другим последствием в отличие от случая $f-f$ поглощения: свободный электрон может уменьшить свою кинетическую энергию с изменением параметров своей первоначальной ги-



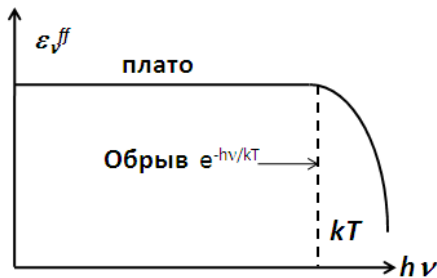
перболической орбиты (кривая В). Это уменьшение энергии электрона сопровождается излучением квантов. В результате его орбита будет иметь большой радиус кривизны: орбита С будет больше приближена к центру Ze.

Поскольку f - f процессы фактически являются ударными, то можно использовать равновесное соотношение, связывающее коэффициенты поглощения и излучения через закон Кирхгофа: $\epsilon_{\nu}^{ff} = a_{\nu}^{ff} B_{\nu}(T)$. Тогда получим следующее выражение для коэффициента излучения:

$$\epsilon_{\nu}^{ff} = \sqrt{\frac{32\pi}{3}} g_{\nu}^{ff} Z^2 N_e N_{ion} \sigma_e r_e c^2 \left(\frac{kT}{mc^2} \right)^{-1/2} e^{-h\nu/kT},$$

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} - \text{классический радиус электрона,}$$

σ_e – сечение электронного рассеяния (см. ниже)



Ясно, что излучение будет постоянным при $h\nu \ll kT$ и падает экспоненциально при $h\nu \gg kT$.

Полный коэффициент поглощения HI определяется как

$$\alpha_{\nu} = \sum_n a_{\nu n}^{bf} N_n + a_{\nu}^{ff} N_e N_{ion}.$$

Здесь N_n есть число атомов водорода на уровне n , N_e и N_{ion} – концентрации свободных электронов и ионов соответственно.

Коэффициент поглощения нейтральным гелием HeI .

Гелий – второй по обилию химический элемент после водорода. Его роль в поглощении прежде всего зависит от числа атомов нейтрального гелия. Из рис. 43 видно, что состояние HeI преобладает для температур, меньших 14000 К. Но при таких низких температурах очень мало высокоэнергичных квантов, способных произвести фотоионизацию, например, с основного состояния с потенциалом ионизации 24.6 эв (см. рис. 44).

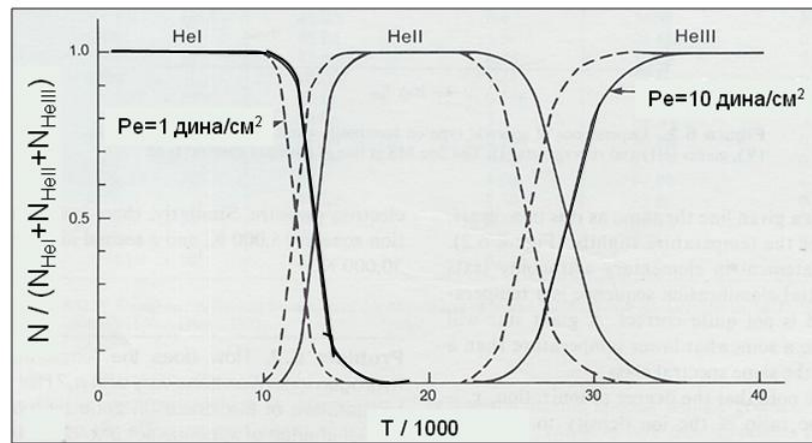


Рис. 43. Степень ионизации *HeI*.

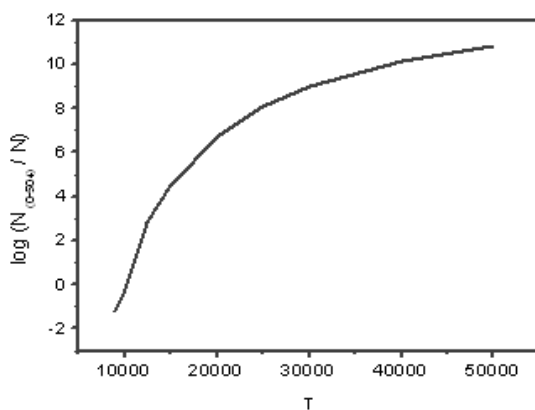


Рис. 44. Число квантов в интервале 0-504 Å. 504 Å есть предел ионизации с первого уровня *He I*.

Отсюда следует вывод: *HeI* важен как источник поглощения для умеренно горячих звезд, для которых гелий еще остается нейтральным.

К сожалению, для гелия нет строгой формулы для коэффициента поглощения, подобной формуле Крамерса. Но на основе экспериментальных и теоретических данных были созданы обширные таблицы, которые для удобства использования аппроксимированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln a_{\lambda}(n=1) &= (-51.77 + 2.0) \ln \lambda(\text{Å}) \quad \text{при } \lambda < 504 \text{Å}, \\ \ln a_{\lambda}(n=2) &= -390.026 + (7.506 + 0.318 \ln \lambda)(42.545 - \ln \lambda) \\ &\quad \text{при } \lambda < 2600 \text{Å}. \end{aligned}$$

Коэффициент поглощения ионизованным гелием *HeII*.

HeII является водородоподобным атомом. Поэтому для него справедлива формула Крамерса с множителем Z^2 . Для *HeII* $Z=2$. Потенциал ионизации гелия *HeII* равен 54.43 эв. Поэтому для ионизации *HeII* необходимы очень высокоэнергичные фотоны. В результате роль *HeII* в поглощении будет значима только для очень горячих звезд. Из рис. 45 видно, что при высоких частотах сечение атомов гелия *HeI* и *HeII* больше сечения для водорода. Поэтому поглощение гелия при таких частотах может быть значимым, несмотря на меньшее чем водород содержание.

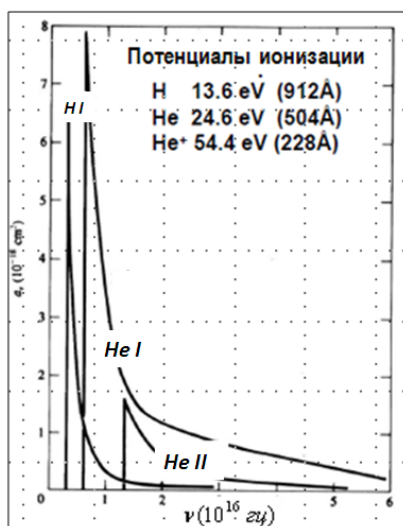


Рис. 45. Сравнение сечений гелия и водорода.

Коэффициент поглощения отрицательным ионом водорода H^- ($b-f$ переходы)

При низких температурах ($T < 10^4$ K) большая часть свободных электронов уходит на фоторекомбинацию для образования нейтрального водорода и гелия. По этой же причине уменьшается роль $f-f$ переходов для этих атомов и роль электронного рассеяния. Поэтому в 30х годах прошлого столетия считалось, что, например, в атмосфере Солнца нет значимых агентов поглощения. Но в таком случае излучение от более глубоких слоев атмосферы, где температура достаточно велика, должно исходить излучение в коротковолновой части спектра, т.е. излучение должно быть бело-голубым. Но Солнце является желтым по цвету! Эта проблема была решена лишь в 1940 году, когда был установлен новый агент поглощения при низких температурах - отрицательные ионы.

На важность отрицательных ионов в поглощении указал еще в 1930 году голландский астроном Паннекук А. Отрицательный ион это нейтральный атом с присоединенным лишним электроном. Как же может присоединиться лишний электрон? Покажем на примере отрицательного иона водорода (рис. 46).

- 1) Пусть к атому водорода подходит свободный электрон.
- 2) Электрическое поле этого электрона, которое падает по закону $1/r^2$, будет индуцировать дипольный момент в нейтральном атоме: в результате два электрона окажутся по обе стороны от протона.
- 3) Возникший дипольный момент пропорционален электрическому полю электрона, т.е. пропорционален $1/r^2$.
- 4) Свободный электрон захватывается электрическим полем диполя и присоединяется к нейтральному водороду.

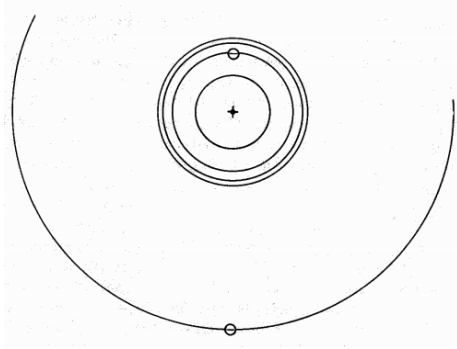


Рис. 46. Отрицательный ион водорода.

Итак, заряд ядра атома водорода не полностью экранирует заряд вращающегося вокруг него электрона. Поэтому ядро может иметь и второй электрон с энергией связи $\chi_{H^-} = 0.754$ эв. Ион H^- не имеет возбужденных состояний. Оба электрона находятся на одном и том же уровне, но с противоположными спинами. Все фотоны с $\lambda < 16400$ Å имеют энергию для отрыва второго электрона. Схематически взаимодействие иона H^- с фотоном представляется следующим образом:

$$H^- + \text{фотон} \leftrightarrow H + e^- \text{ - для } b\text{-}f \text{ переходов,}$$

$$H^- + e(V_1) + \text{фотон} \leftrightarrow H + e(V_2)^- \text{ для } f\text{-}f \text{ переходов.}$$

Для звезд солнечного типа $b\text{-}f$ поглощение ионами H^- является более главным фактором, чем поглощения HI . Почему у звезд солнечного типа есть условия для образования H^- в отличие от горячих звезд? Запишем формулу Саха:

$$N_{H^-} = \frac{1}{2} N_{HI} P_e \frac{h^3}{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}} e^{-\frac{\chi_{H^-}}{kT}},$$

$$\log \frac{N(HI)}{N(H^-)} = -\log P_e - \frac{5040}{T} I + 2.5 \log T + 0.1248$$

По этой формуле можно получить, что число ионов H^- намного меньше атомов нейтрального водорода (см. рис. 47). Чем же тогда вызвана большая роль в поглощении иона H^- ? Сравним эффективность поглощения HI и H^- в визуальной области для двух случаев - Солнца и А-звезд.

Для Солнца примем следующие средние параметры: $T=6000$ К, $\log N_e=13.6$.

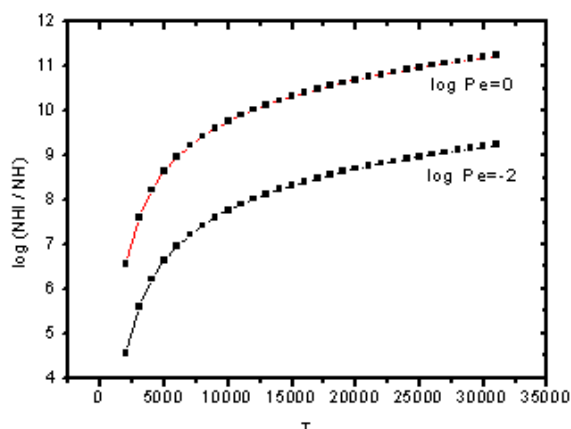


Рис. 47. Сравнение числа ионов H^- и нейтрального водорода HI .

Используя формулу Саха, получим, что

$$\frac{N_{HII}}{N_{HI}} = 10^{-4}, \quad \frac{N_{H^-}}{N_{HI}} = 10^{-7.5}.$$

Из этого следует (см. также рис. 53), что содержание ионов H существенно меньше, чем нейтрального водорода. Опять возникает вопрос: почему поглощение отрицательными ионами столь важно? Для ответа выясним, за счет какого агента поглощения происходит образование непрерывного спектра в важной визуальной области (бальмеровского континуума, переход с уровня 3). Для этого сравним следующие величины:

$$\frac{N_{HI}(n=3)}{N_{HI}(n=1)} = \frac{g_3}{g_1} e^{-12.136/kT} = \frac{18}{2} e^{-23.4} = 6 * 10^{-10},$$

$$\frac{N_{H^-}}{N_{HI}(n=3)} = \frac{N_{H^-}}{N_{HI}(n=1)} \frac{N_{HI}(n=1)}{N_{HI}(n=3)} = \frac{3 * 10^{-8}}{6 * 10^{-10}} = 500.$$

Сечения фотоионизации $HI(n=3)$ и H одного порядка. Но за счет преобладания в числе ионов H над $N_{HI}(n=3)$ поглощение H в бальмеровском континиуме образуется именно за счет иона H для звезд с температурами порядка солнечной.

Для А-звезды возьмем следующие параметры: $T=10000\text{ K}$, $\log N_e=13.8$. Тогда по формуле Саха имеем:

$$\frac{N_{H^-}}{N_{HI}} = 2 * 10^{-7}.$$

Это в 6 раз больше, чем у Солнца. Сравним это число ионов H с числом атомов нейтрального водорода на 3 уровне:

$$\frac{N_{H^-}}{N_{HI}(n=3)} = 2 * 10^{-2}.$$

Таким образом, число ионов H намного меньше атомов водорода на уровне 3. Поэтому основным источником непрозрачности в визуальной области для А-звезд являются не ионы H^- , а нейтральный водород.

Теперь выясним роль свободных электронов, так как для образования ионов H должно быть не только много атомов нейтрального водорода, но много свободных электронов. Поставка свободных электронов у разных звезд производится разными способами.

О-В звезды: поставщик электронов – ионизация водород и гелия. Электронов много, но практически нет нейтрального водорода.

А-звезды: поставщик электронов – ионизация водорода. Электронов много, но мало нейтрального водорода.

Звезды солнечного типа: поставщик электронов – ионизация металлов (*Na, Mg, Al, Si, Ca, Fe*), имеющих низкий потенциал ионизации (5-7 эв). При этом образуется много свободных электронов и при наличии многих нейтральных атомов водорода возникают благоприятные условия для образования отрицательного иона.

Как рассчитать эффективность поглощения? Для сечения $a_{\lambda}^{bf}(H^-)$ не имеется строгой формулы, но имеются табличные данные, которые обычно представляются в виде аппроксимационных формул. Наиболее используемые это формулы Джинджерича:

$$a_{\lambda}^{bf}(H^-) = 6.80133 \cdot 10^{-3} + 0.178708\lambda + 0.164790\lambda^2 - 2.04842 \cdot 10^{-2}\lambda^3 + 5.95244 \cdot 10^{-4}\lambda^4 - \text{на единицу } P_e, \lambda - \text{в тысячах ангстрем, } P_e - \text{в единицах } 10^{-26} \text{ см}^4 \text{ дина.}$$

Коэффициент поглощения отрицательным ионом водорода H^- (f-f переходы).

Сечение свободно-свободного поглощения $a_{\lambda}^{ff}(H^-)$ обычно определяют в расчете на 1 нейтральный атом водорода и на единицу электронного давления. Строгой формулы для $a_{\lambda}^{ff}(H^-)$ не имеется. Обычно используются аппроксимационные формулы, полученные по табличным данным. Наиболее используемой формулой является формула Джинджерича:

$$a_{\lambda}^{ff}(H^-) = (5.3666 \cdot 10^{-3} - 0.1493 \cdot 10^{-2}g + 2.7039 \cdot 10^{-2}g^2) + (-3.2062 \cdot 10^{-3} + 1.1924 \cdot 10^{-2}g - 5.9390 \cdot 10^{-3}g^2)\lambda + (-4.0192 \cdot 10^{-4} + 7.0355 \cdot 10^{-3}g - 3.4592 \cdot 10^{-4}g^2)\lambda^2.$$

Теперь от сечений перейдем к коэффициентам поглощения. Напомним: коэффициент поглощения (сечение) $a_{\lambda}(H)$ определялся в расчете на один ион H и на один электрон, а коэффициент поглощения $\alpha_{\lambda}(H)$ необходимо определить в расчете на 1 см. Число ионов H определяется формулой Саха:

$$\frac{N_H}{N_{H^-}} N_e = \frac{2U_H(T)}{U_{H^-}(T)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_{H^-}/kT}, \quad P_e = N_e kT.$$

Тогда

$$N_{H^-} = N_H P_e \varphi(T), \quad \varphi(T) = \left(\frac{h^2}{2\pi m_e kT} \right)^{3/2} \frac{U_H(T)}{2U_{H^-}(T)} \frac{1}{kT} e^{\chi_{H^-}/kT},$$

$$\varphi(g) = 0.4158 e^{1.726g} g^{5/2}, \quad g = 5040/T.$$

В итоге, общий коэффициент поглощения в расчете на единицу длины будет таков:

$$\alpha_{\lambda}^{bf+ff}(H^{-}) = N_H P_e \left[\varphi(T) a_{\lambda}^{bf} (1 - e^{-hc / \lambda kT}) + a_{\lambda}^{ff} \right]$$

Его вид приведен на рис. 48. Максимум $\alpha_{\lambda}^{bf} = 4 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ (в расчете на 1 ион H) достигается при $\lambda = 8500 \text{ \AA}$.

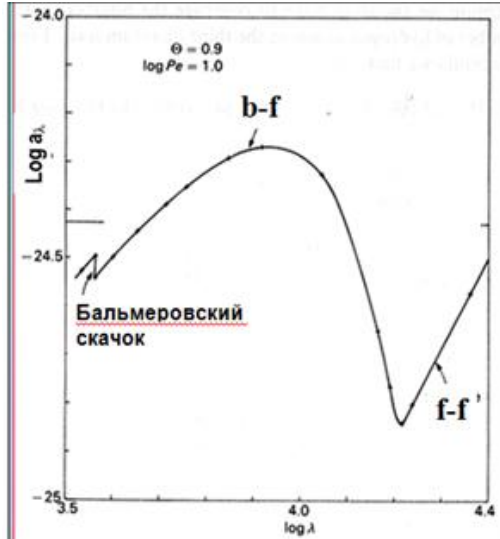


Рис. 48 Коэффициент поглощения $\alpha_{\lambda}^{bf+ff}(H^{-})$ при температуре $\theta = 5040/T = 0.9$ электронном давлении $\log P_e = 1$.

Коэффициенты рассеяния.

При рассеянии фотоны не разрушаются (не поглощаются), а перераспределяются по разным направлениям при взаимодействии фотона с частицей. Наиболее важно рассеяние на электронах. Дело в том, сам электрон не может поглощать фотон по следующей причине. Предположим, что такое поглощение имеет место при массе покоя электрона m_0 . Тогда должен выполняться закон сохранения момента

$$\frac{h\nu}{c} = m V_e = m_0 / \left(\sqrt{1 - \frac{V_e^2}{c^2}} \right) V_e.$$

С другой стороны, закон сохранения энергии требует, чтобы

$$h\nu + m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 + m_0 c^2.$$

Комбинация этих двух выражений дает следующее соотношение:

$$1 - \left(\frac{V_e}{c} \right)^2 = \left(1 - \frac{V_e}{c} \right)^2.$$

Это равенство выполняется, когда $V_e = 0$ (т. е. фотон не поглощается!) или когда $V_e = c$ (что не разрешено!).

В зависимости от значения падающей энергии возможны три случая:

- при очень больших энергиях (несколько Мэв) – используется формула Клейна-Нишины,

- при больших энергиях электронов – работает механизм рассеяния Комптона,

- при низких энергиях ($<12.4 \text{ КэВ} \sim 1 \text{ А}$) – используется формула Томсона. В звездных атмосферах это рассеяние играет большее значение, чем первые два.

При рассмотрении теории рассеяния вполне оправдано использование классической физики по следующей причине. При $T=10\,000 \text{ К}$ скорость электрона равна $V_e=5.4 \cdot 10^7 \text{ см/сек.}$ Соответствующая этой скорости длина волны де Бройля равна $\lambda_{dB}=h/mV_e=12 \text{ А}$. Эта величина намного больше длин волн света в ультрафиолетовом, оптическом и инфракрасном диапазонах. В этом случае квантовые эффекты не играют большой роли.

В классической теории излучения атом рассматривается как классический осциллятор. В общем случае уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m_e \ddot{x} = -\gamma m_e \dot{x} - m_e \omega_0^2 x + e E_0 e^{i\omega t}.$$

$m_e \ddot{x}$ - член, учитывающий инерцию,

$\gamma m_e \dot{x}$ - член, учитывающий затухание,

$m_e \omega_0^2 x$ – член, учитывающий восстановление (закон Гука),

$E_0 e^{i\omega t}$ - член, учитывающий возбуждение.

ω - частота излучения, ω_0 - собственная частота колебаний.

Теория (см. Дополнение) дает следующее выражение для сечения взаимодействия:

$$\sigma_\nu = \frac{2e^2}{m_e c} \left[\frac{\nu^4 \frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu^2 - \nu_0^2)^2 + \nu^2 \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right)^2} \right], \quad \gamma = \frac{8\pi e^4}{3m_e c^3}. \quad (19)$$

Здесь $\nu_0 = \omega_0/2\pi$, $\nu = \omega/2\pi$, γ есть постоянная затухания. Рассмотрим два частных, но очень важных случая.

1 случай-рассеяние на свободных электронах. Для свободного электрона сила $F = -m_e \omega_0^2 x = -kx$ равна нулю, т.е. $k \rightarrow 0$. Тогда для резонансной (естественной) частоты ν_0 имеем

$$\nu_0 = 2\pi \sqrt{k/m_e} \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad \nu \gg \nu_0.$$

В этом случае формула (19) упрощается:

$$\sigma_\nu = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \frac{1}{1 + \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \frac{2\pi}{3c^2} \nu^2}.$$

Оценим член в знаменателе:

$$\frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} = 6.652455 \text{ см}^2 \Rightarrow \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \frac{2\pi}{3c^2} \nu^2 = 1.55 \cdot 10^{-45} \nu^2 \text{ сек}^2.$$

Это означает, что при частотах $\nu < 10^{20}$ герц ($\lambda > 0.02 \text{ А}$) вторым членом в знаменателе можно пренебречь. Таким образом, коэффициент электронного рассеяния не зависит от частоты и имеет следующий вид:

$$\sigma_\nu = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} = \sigma_e.$$

Такое рассеяние обычно называется томсоновским. Роль рассеяния на свободных электронах разная для разных звезд.

- Поздние звезды: число свободных электронов велико из-за ионизации легко ионизируемых атомов (с низким потенциалом ионизации). Но малое сечение σ_e делает электронное рассеяние не эффективным по сравнению с другими источниками поглощения.

- Ранние звезды: при больших температурах почти все частицы ионизованы и нет источников поглощения, кроме электронного рассеяния.

- Для горячих звезд (О -В), где водород преобладает и соблюдается примерно $P_e = 0.5 P_g$, σ_e не зависит и от давления.

2 случай – релеевское рассеяние. Если частота рассеянного излучения намного меньше собственной частоты, то из формулы (19) имеем:

$$\nu \ll \nu_0 \Rightarrow \nu_0 \rightarrow \infty \rightarrow \sigma_\nu = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^4.$$

При этом процессе фотон рассеивается электроном, который связан с ядром. Он происходит, когда длина волны фотона больше размеров атома.

Релеевское рассеяние на атомах водорода более эффективно для G-K звезд, чем рассеяние на электронах, так как число атомов водорода достаточно велико. Релеевское рассеяние является также преобладающим для протяженных оболочек сверхгигантов.

Коэффициент поглощения тяжелыми элементами. .

Коэффициент поглощения тяжелыми элементами характеризуется наличием многих скачков, вызванных ионизацией электронов с различных электронных оболочек (см. рис. 49).

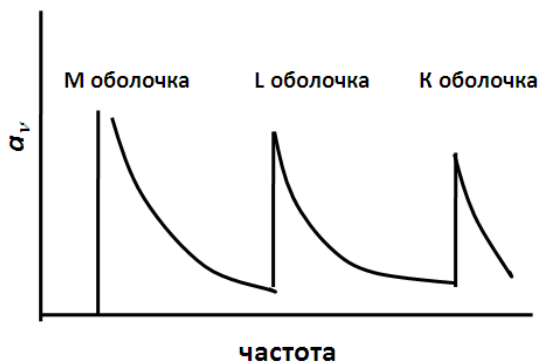


Рис. 49. Ионизация атомов с разных оболочек.

Поглощение тяжелыми элементами (металлами) в визуальной области играет незначительную роль из-за малого содержания (например, для железа $Fe/H=10^{-4}$). Расчеты дают, что $\alpha(\text{металлы}) \sim 1\% \alpha(H^+bf)$. Вклад металлов в поглощение является косвенным - через легкую ионизацию и через поставку свободных электронов. Но в ультрафиолетовой области вклад металлов очень существенный (см. рис. 50).

Что касается многочисленных молекулярных образований, то их роль, конечно, важна только для очень поздних звезд. Например, молекула H_2 важна в инфракрасной области спектра для звезд холоднее класса М. Молекула H_2^+ дает вклад в оптическом диапазоне меньше 10% по сравнению с вкладом иона H^+ . Молекула H_2^- производит $f-f$ поглощение у поздних звезд.

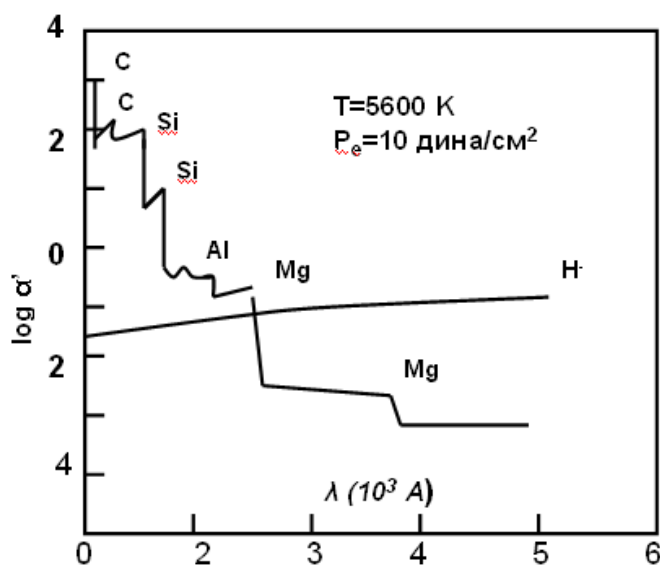


Рис. 50. Вклад тяжелых элементов в общее поглощение. По оси у отложен коэффициент поглощения в пересчете на единицу массы

Перечень элементов, для которых имеются достаточно надежные теоретические или экспериментальные данные о коэффициентах поглощения дан в табл. 3.

Придавая большое значение точности атомарных данных для изучения звезд и особенно внутреннего строения звезд, были созданы несколько международных научных коллективов.

Например:

- The Opacity Project (1983-2007) – США, Англия, Франция, Германия, Венесуэла;
- Livermore OPAL opacities.

Согласие результатов этих двух проектов на уровне 5%. Следует отметить, что от точности расчетов коэффициентов непрерывного поглощения зависит не только точность определения непрерывного спектра, но также и точность получения профилей линий. На рис. 51 представлены профили линии $H\delta$, полученные при разных коэффициентах непрерывного поглощения: сплошная линия это профиль при обычном расчете коэффициента непрерывного поглощения, штриховая – при в 1.2 раза увеличенном коэффициенте, точечная линия при в два раза увеличенном коэффициенте.

<i>HI</i>							
<i>He I</i>	<i>He II</i>						
<i>C I</i>	C II	<i>C III</i>	<i>C IV</i>				
<i>N I</i>	<i>N II</i>	<i>N III</i>	<i>N IV</i>	<i>N V</i>	<i>N VI</i>		
<i>O I</i>	<i>O II</i>	<i>O III</i>	<i>O IV</i>	<i>O V</i>	<i>O VI</i>		
<i>F I</i>	<i>F II</i>	<i>F III</i>	<i>F IV</i>	<i>F V</i>	<i>F VI</i>		
<i>Ne I</i>	<i>Ne II</i>	<i>Ne III</i>	<i>Ne IV</i>	<i>Ne V</i>	<i>Ne VI</i>		
<i>Na I</i>	<i>Na II</i>	<i>Na III</i>	<i>Na IV</i>	<i>Na V</i>	<i>Na VI</i>		
<i>Mg I</i>	<i>Mg II</i>	<i>Mg III</i>	<i>Mg IV</i>	<i>Mg V</i>	<i>Mg VI</i>		
<i>Al I</i>	<i>Al II</i>	<i>Al III</i>	<i>Al IV</i>	<i>Al V</i>	<i>Al VI</i>		
<i>Si I</i>	<i>Si II</i>	<i>Si III</i>	<i>Si IV</i>	<i>Si V</i>	<i>Si VI</i>		
<i>P I</i>	<i>P II</i>	<i>P III</i>	<i>P IV</i>	<i>P V</i>	<i>P VI</i>		
<i>S I</i>	<i>S II</i>	<i>S III</i>	<i>S IV</i>	<i>S V</i>	<i>S VI</i>	<i>S VII</i>	
<i>Cl I</i>	<i>Cl II</i>	<i>Cl III</i>	<i>Cl IV</i>	<i>Cl V</i>	<i>Cl VI</i>		
<i>Ar I</i>	<i>Ar II</i>	<i>Ar III</i>	<i>Ar IV</i>	<i>Ar V</i>	<i>Ar VI</i>	<i>Ar VII</i>	<i>Ar VIII</i>
<i>K I</i>	<i>K II</i>	<i>K III</i>	<i>K IV</i>	<i>K V</i>	<i>K VI</i>		
<i>Ca I</i>	<i>Ca II</i>	<i>Ca III</i>	<i>Ca IV</i>	<i>Ca V</i>	<i>Ca VI</i>		
<i>Ti I</i>	<i>Ti II</i>	<i>Ti III</i>	<i>Ti IV</i>	<i>Ti V</i>			
<i>V I</i>	<i>V II</i>	<i>V III</i>	<i>V IV</i>	<i>V V</i>			
<i>Cr I</i>	<i>Cr II</i>	<i>Cr III</i>	<i>Cr IV</i>	<i>Cr V</i>	<i>Cr VI</i>		
<i>Mn I</i>	<i>Mn II</i>	<i>Mn III</i>	<i>Mn IV</i>	<i>Mn V</i>	<i>Mn VI</i>		
<i>Fe I</i>	<i>Fe II</i>	<i>Fe III</i>	<i>Fe IV</i>	<i>Fe V</i>	<i>Fe VI</i>	<i>Fe VII</i>	<i>Fe VIII</i>
<i>Co I</i>	<i>Co II</i>	<i>Co III</i>	<i>Co IV</i>	<i>Co V</i>	<i>Co VI</i>	<i>Co VII</i>	
<i>Ni I</i>	<i>Ni II</i>	<i>Ni III</i>	<i>Ni IV</i>	<i>Ni V</i>	<i>Ni VI</i>	<i>Ni VII</i>	<i>Ni VIII</i>
<i>Cu I</i>	<i>Cu II</i>	<i>Cu III</i>	<i>Cu IV</i>	<i>Cu V</i>	<i>Cu VI</i>		
<i>Zn I</i>	<i>Zn II</i>	<i>Zn III</i>					

Табл. 3. Точность определения параметров для радиационных переходов (в соответствии с указанным шрифтом): **C II** – отличная, *He II* – хорошая, *F Cur III*– посредственная, *V II* - плохая

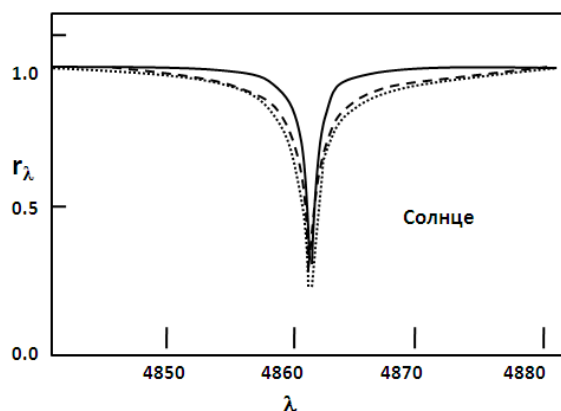


Рис. 51. Пример важной роли коэффициента непрерывного поглощения на профили линий.

В заключение приведем перечень агентов поглощения при солнечном содержании химических элементов для разных спектральных диапазонов.

Инфракрасный диапазон:

- f - f поглощение в поле ионов (при разных температурах T);
- f - f поглощение в поле атомов HI при $T < 10000$ К;
- вынужденное излучение.

Визуальный диапазон:

- f - f поглощение при всех температурах;
- b - f поглощение водородом при $T < 10\,000$ К;
- b - f поглощение отрицательным ионом водорода;
- вынужденное излучение при высоких температурах;
- рассеяние на свободных электронах при высоких температурах.

Ультрафиолет ($\lambda < 912$ А):

- f - f поглощение при $T > 20\,000$ К;
- b - f поглощение нейтральным водородом при $T < 40\,000$ К;
- b - f поглощение отрицательным ионом водорода при $T < 10\,000$ К;
- b - f и f - f поглощение молекулой H_2^+ при $T \sim 10\,000$ К;
- b - f поглощение нейтральными металлами Mg, Al, Si, S, Fe при $T < 15\,000$ К;
- b - f поглощение Cl при $T < 20\,000$ К;
- релеевское рассеяние на HI при $T < 20\,000$ К;
- рассеяние на свободных электронах при высоких температурах.

Экстремальный ультрафиолет:

- b - f поглощение нейтральным водородом при $T < 60\,000$ К;
- b - f поглощение гелием HeI при $T < 100\,000$ К;
- b - f поглощение $HeII$ при $T > 30\,000$ К;
- b - f поглощение $C, N, O II, III, IV$ при $T > 20\,000$ К.

Ниже (рис. 52-53) приведен вклад главных агентов поглощения (водород и гелий) при солнечном содержании для звезд разных спектральных классов. По оси y отложены коэффициенты поглощения в расчете 1 атом водорода и на единичное электронное давление дина/см^2 и на глубине атмосферы с $\tau = 1$.

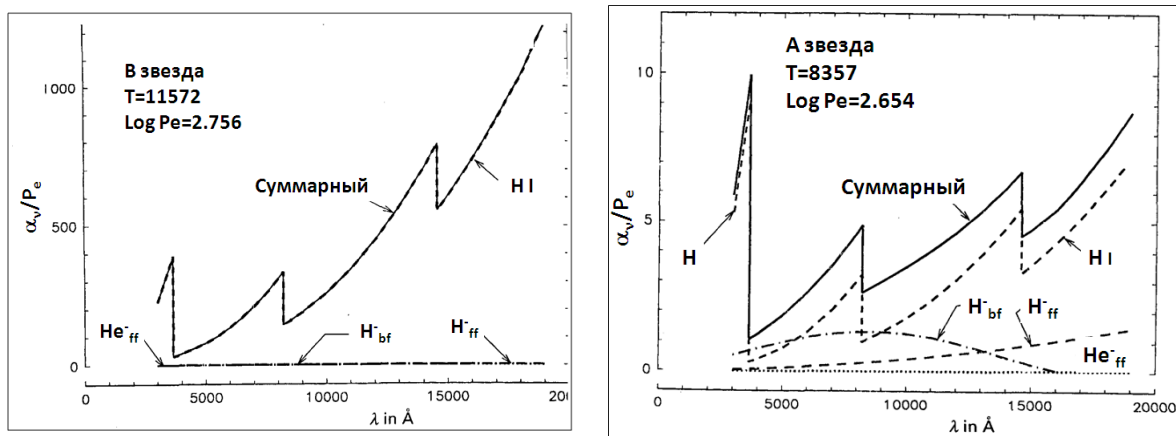


Рис. 52. Агенты поглощения для В-звезды (слева) и для А-звезды.

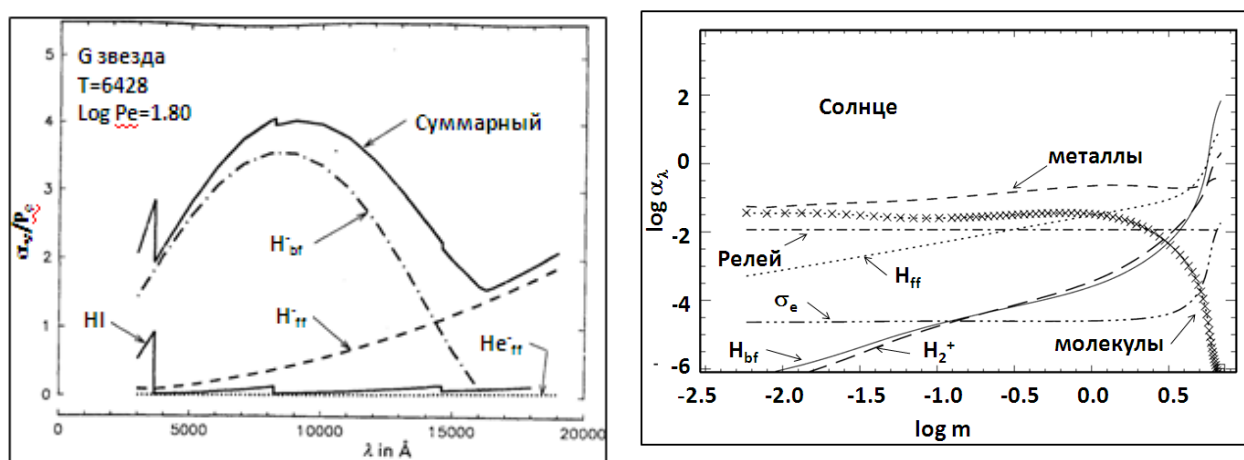


Рис. 53. Агенты поглощения для G звезды (рис. слева). Роль всех агентов поглощения для атмосферы Солнца (рис. справа). На последнем рисунке видна большая роль поглощения тяжелых элементов.

«Покровной» эффект

Кроме поглощения в непрерывном спектре в ЗА возникают многочисленные спектральные линии поглощения. Коэффициент поглощения в них может превышать коэффициент поглощения в непрерывном спектре на 5-7 порядков. Но отдельная линия занимает очень узкий интервал частот, поэтому может возникнуть неверное представление об их незначительной роли как в структуре ЗА, так в теоретическом выходящем излучении. Однако большое число (до многих миллионов) таких «слабых» линий может произвести существенно значимые эффекты, из которых мы отметим следующие.

- Перекрытие линий друг с другом может произвести понижение уровня непрерывного спектра.
- Такое перекрытие линий блокирует излучение в области сгущения линий, вызывая переизлучение этого заблокированного излучения в более прозрачной области спектра,

где густота линий меньше (см. рис. 54).

– Поглощение в линиях влияет на условие лучистого равновесия, что приводит к изменению распределения температуры.

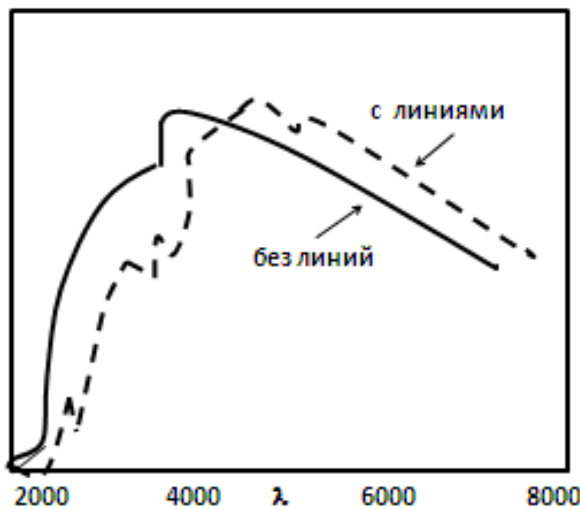


Рис. 54. Сильное поглощение линиями в синей части спектра производит переизлучение в визуальной и красной частях спектра.

Учет влияния линий на структуру ЗА представляет большую вычислительную проблему: число линий очень велико и коэффициент поглощения внутри линии меняется на несколько порядков (см. Пособие 2). Если для одной линии для описания профиля взять 10 точек по частоте, то для прямого учета поглощения в 1 млн. линий надо иметь порядка 10^7 точек. В таком случае, например, согласно сообщению Куруца Р., расчет одной модели ЗА с прямым учетом линий требовал месяц счета на быстрой Альфа рабочей станции или одного дня счета модели на компьютере с параллельным вариантом счета. Есть несколько других подходов в решения этой вычислительной проблемы. Приведем два из них.

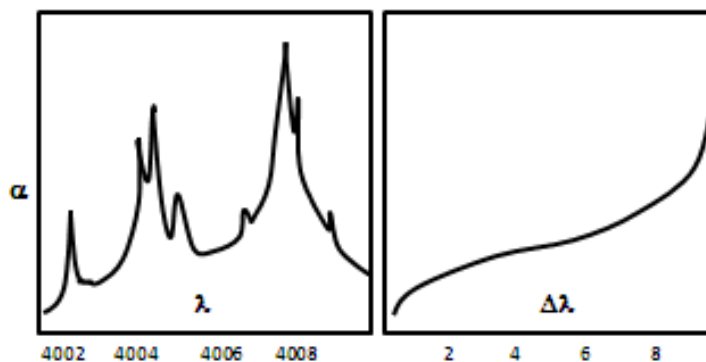


Рис. 55. Представление сильной частотной зависимости коэффициента поглощения в линиях (слева) плавной функцией (справа).

Первый метод – использование ODF функции (“Opacity Distribution Function”). Идея метода исходит из следующего. Запишем условие лучистого равновесия в квадратурной форме:

$$\int \alpha_\nu J_\nu d\nu = \int \alpha_\nu S_\nu d\nu \Rightarrow \int \alpha_\nu J_\nu d\nu = \sum_i \omega_i \alpha_i J_i.$$

Понятно, что члены суммы можно перераспределить в порядке увеличения (или уменьшения) коэффициентов поглощения в линиях. Интегральная сумма при этом, конечно, не изменится. Поэтому в этом методе для определенного интервала длин волн определяется один раз реальное поведение коэффициента поглощения с учетом линий (см. рис. 55). Затем для этого интервала строится уже плавная функция (ODF), описывающая поведение коэффициента поглощения (рис. 55 справа). Эта операция проводится для всех небольших интервалов длин волн, на которые был разделен весь спектр. Обычно число интервалов около 1400, ширина интервалов порядка 10 Å. Для каждого интервала ODF находится для фиксированных значений температуры, электронного давления, химического содержания элементов и микротурбулентных скоростей. Вся эта информация табулируется и может быть использована для будущих расчетов.

Главный недостаток метода заключается в том, что такие таблицы вычисляются для фиксированного химического содержания элементов, производящих многочисленные линии и не могут быть использованы при ином содержании, которое имеет исследуемая звезда.

Другой метод - метод выборочной непрозрачности (Opacity Sampling, OS) основан на замене точной зависимости коэффициента поглощения выборкой в случайно распределенных частотах.

Использование обоих методов показало, что они дают незначительное различие в температурном распределении по глубине величиной в 20 – 60 K. Роль покровного эффекта на температурное распределение оказалась важной: он приводит к охлаждению верхних слоев 3A (рис. 56), где и образуются спектральные линии. Физика этого явления весьма проста. Если мы добавляем новый источник поглощения в высокочастотную (значит, энергичную и нагревающую среду) спектральную область, то тем самым вызываем охлаждение среды. Аналогично, если мы добавляем новый источник поглощения в низкочастотную (значит, мало энергичную и охлаждающую) область спектра, то мы тем самым можем вызвать нагрев среды.

Следует иметь в виду, что линии поглощения образуются в верхних слоях атмосферы. Поэтому использование моделей без учета покровного эффекта для определения химического содержания элементов может привести к неверному результату.

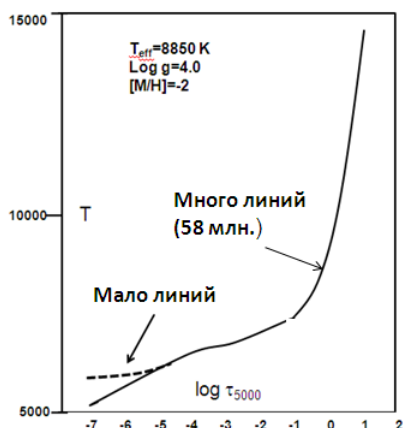


Рис. 56. Охлаждение 3A за счет покровного эффекта.

«Классические» модели звездных атмосфер

После получения наблюдательного материала перед астрофизиками стоят следующие задачи:

- как объяснить эти данные?
- какие физические процессы производят эти данные?
- какая теоретическая модель наблюденного объекта лучше всего воспроизводит эти наблюдательные данные?

Поэтому, чтобы получить информацию о звездах из их спектров, необходимо уметь рассчитывать теоретический спектр для дальнейшего его сравнения с наблюдениями. Ясно, что часто предполагаемый планковский характер излучения от звезды весьма далек от реальности. Об этом свидетельствует, в частности, следующее:

- наличие скачков в спектре;
- излучение образуется на разных глубинах, где температура различная;
- наличие многочисленных спектральных линий поглощения.

Детальный расчет спектра невозможен без предварительно рассчитанной модели звездной атмосферы (МЗА). МЗА это таблица изменений физических данных с глубиной, вычисленных на основе известных физических процессов и законов: температуры, давления, концентрации частиц, электронной концентрации и др. Зачем нужны модели конкретно?

- 1) Модели звездных атмосфер являются связью между наблюдательной и теоретической астрофизикой.
- 2) Модели атмосфер являются граничным условием при расчете моделей внутреннего строения звезд.
- 3) Модели атмосфер являются единственным инструментом для определения химического содержания в широком диапазоне физических условий.
- 4) Модели атмосфер являются инструментом для изучения химической эволюции нашей Галактики и Вселенной в целом.

Обычно рассчитывается сетка МЗА для набора исходных физических параметров: T_{eff} , $\log g$ и химического состава (металличности).

Существуют 2 подхода в моделировании ЗА:

- полуэмпирический подход, когда на основе имеющихся спектральных наблюдений определяется поведение физических величин с глубиной в ЗА. Этот подход широко использовался для солнечной атмосферы, для которой есть возможность измерить потемнение диска или измерить горизонтальную неоднородность;

- априорный подход, когда на основе известной физики определяется поведение физических величин с глубиной, что далее позволяет вычислить теоретический спектр с последующим сравнением его с наблюдениями. Этот подход применим к звездам, для которых определяется только интегрированное по диску излучение.

Ниже мы убедимся, что для начала процесса расчета моделей атмосфер, необходимо иметь заранее вычисленные следующие величины:

- таблицы зависимости монохроматического коэффициента поглощения в непрерывном спектре от температуры и электронного давления

$$\alpha^c = \alpha^c(T, P_e).$$

- таблицы зависимости среднего поглощения в непрерывном спектре от температуры и электронного давления

$$\bar{\alpha}^c = \bar{\alpha}^c(T, P_e).$$

- таблицы зависимости газового давления от температуры и электронного давления

$$P_g = P_g(T, P_e).$$

В основе моделирования лежат основные предположения, описанные выше. Напомним основные уравнения, которые должны быть решены при моделировании:

$$\frac{dP}{d\tau_v} = \frac{g}{\alpha_v} - \text{уравнение гидростатического равновесия,}$$

$$d\tau_v = -\alpha_v dz - \text{установление оптической шкалы,}$$

$$P = kT * (N_H + N_{He} + \dots + N_e) + P_{луч} - \text{уравнение состояния,}$$

$$F = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi} - \text{установление эффективной температуры,}$$

$$\mu \frac{dI(\tau_v, \mu)}{d\tau_v} = I(\tau_v, \mu) - S(\tau_v) - \text{уравнение переноса излучения. (20)}$$

Основные шаги моделирования.

1) Прежде всего для расчетов надо определиться, в какой шкале будут отсчитываться глубины в атмосфере (начиная с поверхности). В качестве независимой переменной по глубине выбирают:

- геометрическую протяженность (в см., м., км.);
- но чаще используют оптическую глубину τ_v ;
- ранее использовали среднюю оптическую глубину $\tau = \tau_{Ros}$, связанную со средним коэффициентом поглощения Росселанда. Но вычисление средних коэффициентов поглощения и связанных с ними оптической глубины это не тривиальная задача. Поэтому лучше оптическую глубину выбирать так, чтобы она была независимой от

частоты. Это можно сделать, зафиксировав ее на определенной длине волны (часто ее берут на длине волны 5000 Å - τ_{5000}).

- другие исследователи используют «массу», определяемую как

$$m(\tau_{5000}) = \int_0^Z \rho(z) dz, \quad \rho(z) - \text{плотность вещества}.$$

Опыт показывает, что выбор такой шкалы облегчает решение уравнения гидростатического равновесия, но создает трудности для решения уравнения переноса излучения.

2) Далее для начала счета необходимо сделать предположение о первоначальном законе распределения температуры с глубиной. Есть несколько возможностей.

- Лучше всего для этой цели применить результат для серого приближения:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 [q(\tau) + \tau].$$

Опыт показал, что это самое разумное приближение для начала итераций. Во-первых, это приближение получено с учетом условие лучистого равновесия (хотя бы и для серого случая). Во-вторых, часто коэффициент поглощения у реальных атмосфер слабо зависит от частоты для достаточно широких спектральных областей.

- Некоторые исследователи используют масштабированное по Солнцу распределение температуры с глубиной

$$T(\tau)_* = \frac{T_{eff}^*}{T_{eff}^{Солнце}} T(\tau)_{Солнце}.$$

Солнечное распределение температуры в атмосфере Солнца $T(\tau)_{Солнце}$ можно установить по методу, описанному выше при рассмотрении серых атмосфер. Рис. 57 показывает неплохую точность такого представления.

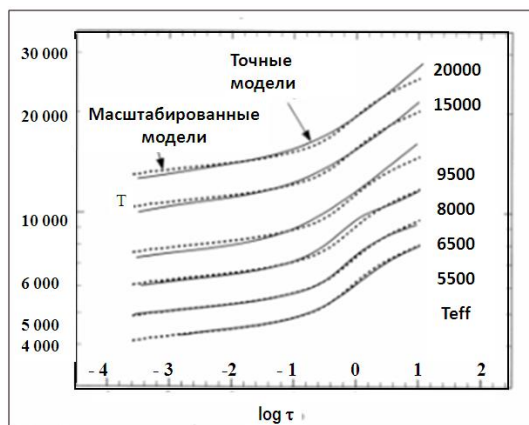


Рис. 57. Сравнение масштабированного распределения температуры с распределениями по точным моделям.

3) Решение уравнения гидростатического равновесия. Хотя это простое дифференциальное уравнение первого порядка, его решение не является простой задачей. Дело в том, что полное давление определяется как

$$P(\tau) = P_g[T(\tau), P_e(\tau)] + P_{\text{луч}}(\tau), \quad P(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} \frac{g}{\alpha[T(\tau), P_e(\tau)]} d\tau.$$

Для интегрирования второго уравнения можно использовать любую квадратуру. Но для этого надо заранее вычислить таблицу значений средних коэффициентов поглощения α $[T, P_e]$. Решение уравнения делается итерациями. Наиболее простой способ решения уравнения приведен ниже (взято из книги Грея).

$$\begin{aligned} \frac{dP_g}{d\tau} &= -\frac{g}{\alpha} \Rightarrow P_g^{1/2} dP_g = P_g^{1/2} \frac{g}{\alpha} d\tau, \\ \frac{2}{3} P_g^{3/2}(\tau) &= \int_0^{\tau} P_g^{1/2} \frac{g}{\alpha} dt, \\ P_g(\tau) &= \left(\frac{3}{2} g \int_0^{\tau} P_g^{1/2}(t) \frac{dt}{\alpha} \right)^{2/3}, \\ P_g(\tau) &= \left(\frac{3}{2} g \int_{-\infty}^{\log \tau} P_g^{1/2}(t) \frac{t^{1/2}}{\alpha \log e} d \log t \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее уравнение решается методом итераций.

2) Соотношение « $P_g - P_e - T$ »).

При решении уравнения гидростатического равновесия определяется величина газового давления $P_g(\tau)$. Но во многих используемых в дальнейшем формулах (например, в формулах Саха-Больцмана) используется электронное давление $P_e(\tau)$. А эти формулы, как указывалось выше, необходимы для определения непрозрачности вещества $\alpha(\tau) = \alpha(T, P_e)$. Таким образом возникает необходимость найти соотношение $P_e(\tau) = P_e(P_g)$.

Для горячих звезд это соотношение устанавливается довольно просто, так как основным поставщиком свободных электронов является ионизация водорода. Тогда

$$N_p \approx N_e, \quad N_g = N_p + N_e \approx 2N_e, \quad P_g \approx 2P_e$$

Тяжелые элементы также поставляют электроны, но содержание этих элементов при низких температурах на несколько порядков меньше содержания водорода.

При низких температурах водород уже не ионизируется, и основным поставщиком свободных электронов становятся легко ионизуемые тяжелые элементы (*C, Na, Mg, Fe* и

др.). Эти элементы находятся в нейтральном, ионизованном и, возможно, в дважды ионизованном состояниях. Поэтому ниже в формуле Саха

$$\frac{N_{r+1}}{N_r} P_e = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{kT}}. \quad (22)$$

мы ограничимся состояниями $r=0,1,2$. Полное число атомов элемента с зарядом Z равно $N_Z = N_{Z0} + N_{1Z} + N_{2Z}$. Допустим, что данным значениям P_g и T соответствует первоначальное значение P_e .

Для каждого элемента с зарядом Z по формуле (21) вычислим следующие отношения:

$$\frac{N_{r=1,Z}}{N_{r=0,Z}} \equiv \frac{N_{1Z}}{N_{0Z}}, \quad \frac{N_{r=2,Z}}{N_{r=1,Z}} \equiv \frac{N_{2Z}}{N_{1Z}},$$

Далее: $N_{\text{ядро}} = \sum N_Z$ - есть полное число ядер, $\sum N_Z x_{1Z}$ есть число электронов, поставляемых при первой ионизации, $\sum 2N_Z x_{2Z}$ есть число электронов, поставляемых при второй ионизации. Таким образом, среднее число электронов N_e в расчете на одно ядро равно:

$$\bar{N}_e = \frac{\sum_Z N_Z x_{1Z} + 2 \sum_Z N_Z x_{2Z}}{\sum_Z N_Z} = \frac{\sum_Z \varepsilon_Z x_{1Z} + 2 \sum_Z \varepsilon_Z x_{2Z}}{\sum_Z \varepsilon_Z}.$$

Здесь $\varepsilon_Z = N_Z / N_H$ - химическое содержание элементов по отношению к водороду. Теперь можно получить искомое соотношение:

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{(N_{\text{ион}} + N_{\text{атом}} + N_e)kT}{N_e kT} = \frac{N_{\text{ядро}} + N_e}{N_e} = \frac{\bar{N}_e + 1}{\bar{N}_e}, \Rightarrow P_e = P_g \frac{\bar{N}_e}{\bar{N}_e + 1}. \quad (23)$$

Полученное значение может не совпасть с первоначальным значением P_g . Поэтому уравнение (23) придется решать методом итераций. Расчеты показывают, что для горячих звезд $P_e \sim 0.5 P_g$, $P_e \sim P_g^{1/2}$. Мы рассмотрели простую ситуацию. Но в реальности в звездной атмосфере могут присутствовать отрицательные ионы (H^- , H_2^- , He^-) и молекулярные образования. Поэтому задача в этом случае усложняется. Ее решение можно найти в нашей монографии.

Часто полезно знать, каким образом давление определяет значение ускорение тяжести g . Для этого обратимся к уравнению (20):

$$P_g(\tau) = \left(\frac{3}{2} g \int_{-\infty}^{\log \tau} P_g^{1/2}(t) \frac{t^{1/2}}{\alpha \log e} d \log t \right)^{2/3}.$$

Интеграл слабо зависит от давления. Поэтому можно записать, что

$$P_g \approx C(T) g^{2/3}.$$

В общем случае $P_g \sim g^\gamma$. Далее было установлено, что для холодных звезд $\gamma = 0.64$ - для глубоких слоев и $\gamma = 0.54$ - для поверхности. Для горячих звезд $\gamma = 0.83$ - для глубоких слоев и $\gamma = 0.53$ - для поверхности. Теперь для электронного давления связь с g такова для горячих и холодных звезд соответственно:

$$P_e \approx 0.5 P_g \Rightarrow P_e \sim g^{2/3}, \quad P_e \approx P_g^{1/2} \Rightarrow P_e \sim g^{1/3}.$$

(горячие звезды) (холодные звезды)

4) Следующий шаг в моделировании это решение уравнения переноса. Это можно осуществить, в частности, и методом Чандрасекара. Но на практике используются более мощные численные методы, описание которых выходит за рамки нашего изложения. Один из этих методов изложен в Дополнении.

5) Выполнение условия лучистого равновесия. В итоге реализации предыдущих шагов рассчитывается предварительная модель атмосферы с первоначальным распределением температуры. По этой модели можно рассчитать теоретический интегральный поток излучения на каждой глубине. Теперь необходимо проверить полученное решение на сохранение лучистого равновесия: $F(\tau) = \sigma T_{eff}^4$. Имеется несколько методов коррекции температуры, например, следующий метод лямбда-итераций. Он основан на разложении в ряд

$$\int_0^\infty \alpha_\nu J(\tau) d\nu = \int_0^\infty \alpha_\nu \{B_\nu[T_0(\tau) + \delta T]\} d\nu = \int_0^\infty \alpha_\nu B_\nu[T_0(\tau)] d\nu + \delta T \int_0^\infty \alpha_\nu \frac{dB_\nu}{dT} d\nu.$$

Отсюда поправка к первоначальной температуре на определенной глубине определяется как

$$\delta T(\tau) = \frac{\int_0^\infty \alpha_\nu [J(\tau) - B_\nu(\tau)] d\nu}{\int_0^\infty \alpha_\nu [dB_\nu(\tau)/dT] d\nu}.$$

6) Затем все расчеты повторяются с третьего шага.

В результате всех расчетов появляется таблица, показывающая для различных глубин в атмосфере поведение основных физических величин: температуры, давления, концен-

трации разных частиц и др. В некоторых случаях эти таблицы сопровождаются таблицами теоретических потоков в континууме и в некоторых наиболее важных линий (например, водорода). У некоторых сеток моделей атмосфер такие таблицы не приводятся. Это связано с тем, что пользователь, исходя из специфики своей решаемой задачи (необходимое спектральное разрешение, область спектра, список исследуемых линий и др.), сможет самостоятельно вычислить эти потоки, решая уравнение переноса с использованием имеющейся модели.

Наиболее используемыми моделями атмосфер является большая сетка моделей, рассчитанных Робертом Куруцем по программе ATLAS9 (Kurucz R. 1992, <http://kurucz.harvard.edu/grids.html>, модификация Castelli & Kurucz, 2002). В этой программе покровной эффект был учтен для 50 млн линий в варианте ODF. Но в программе ATLAS12 это было сделано уже в варианте OS. Конвекция была учтена по теории длины перемешивания с параметром $\alpha = 1.25$.



Рис. 58. Блок-схема расчета моделей 3А.

Блок-схема этой программы отражена на рис. 58. Параметры моделей приведены ниже и на рис. 59:

$T_{\text{eff}} = 3500 - 50\,000\text{ К}$, шаг $250 - 2500\text{ К}$,

$\log g = 0 - 5$, шаг 0.5 dex ,

$[M/H] = -5 \dots +1$,

спектр получен для интервала $90-16000\text{ Å}$ с шагом $10-20\text{ Å}$.

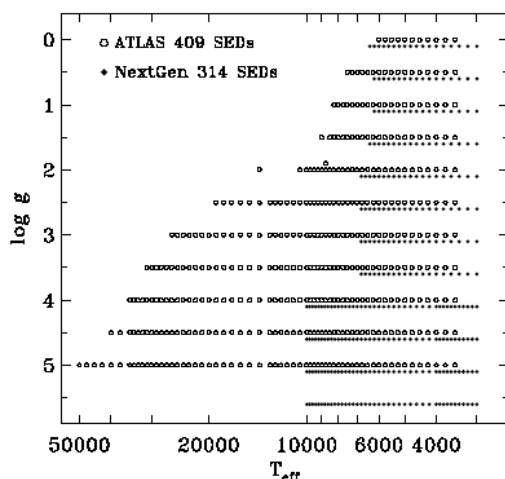


Рис. 59. Параметры моделей Куруца – кружки.
Модели PHOENIX – точки (см. текст ниже).

	MASS	TAU ROSS	TAU 500	TEFF 5770. LOG G 4.44 LOG ABUND .00						CONVECTIVE KAPPA ROSS KAPPA 500 P RAD ACC RAD CONV FRAC					
				X	T	P	NE	NA	RHO						
1	-1.49997	0.0000	0.0000	0.0000	3054.4	2.9400	10.0976	15.3150	-8.3418	-2.2859	-2.2276	.1716	-.7501	-16.2348	0.0000
2	-1.36788	-3.6538	-3.5954	6.4024	4329.1	3.0722	11.2206	15.2958	-8.3611	-2.2859	-2.2276	.1719	-1.2426	-22.7006	0.0000
3	-1.28746	-3.5671	-3.5094	6.6398	4349.8	3.1526	11.2953	15.3740	-8.2828	-2.2167	-2.1650	.1721	-1.2367	0.0000	0.0000
4	-1.23190	-3.5001	-3.4435	6.7508	4357.6	3.2082	11.3452	15.4288	-8.2280	-2.1698	-2.1210	.1722	-1.2077	0.0000	0.0000
5	-1.18463	-3.4387	-3.3837	6.8272	4393.3	3.2553	11.3941	15.4724	-8.1845	-2.1268	-2.0864	.1723	-1.2132	0.0000	0.0000
6	-1.12900	-3.3619	-3.3093	6.9030	4395.2	3.3109	11.4426	15.5278	-8.1290	-2.0802	-2.0413	.1725	-1.1935	0.0000	0.0000
7	-1.06680	-3.2707	-3.2214	6.9748	4427.8	3.3733	11.5039	15.5870	-8.0699	-2.0252	-1.9934	.1727	-1.1746	0.0000	0.0000
8	-.99779	-3.1638	-3.1188	7.0430	4447.8	3.4422	11.5680	15.6539	-8.0029	-1.9658	-1.9386	.1730	-1.1572	0.0000	0.0000
9	-.92358	-3.0435	-3.0035	7.1064	4476.2	3.5164	11.6383	15.7254	-7.9315	-1.9014	-1.8801	.1734	-1.1350	0.0000	0.0000
10	-.84501	-2.9113	-2.8768	7.1651	4504.3	3.5949	11.7122	15.8012	-7.8536	-1.8336	-1.8176	.1739	-1.1099	0.0000	0.0000
11	-.76302	-2.7693	-2.7407	7.2192	4535.2	3.6770	11.7896	15.8803	-7.7766	-1.7625	-1.7523	.1746	-1.0816	0.0000	0.0000
12	-.67862	-2.6199	-2.5974	7.2690	4566.9	3.7614	11.8691	15.9617	-7.6952	-1.6897	-1.6848	.1755	-1.0499	0.0000	0.0000
13	-.59256	-2.4653	-2.4487	7.3148	4599.9	3.8474	11.9501	16.0446	-7.6123	-1.6158	-1.6157	.1768	-1.0146	0.0000	0.0000
14	-.50563	-2.3074	-2.2966	7.3569	4634.3	3.9343	12.0322	16.1283	-7.5286	-1.5406	-1.5458	.1784	-.9731	0.0000	0.0000
15	-.41827	-2.1473	-2.1424	7.3958	4670.7	4.0216	12.1149	16.2121	-7.4447	-1.4642	-1.4755	.1807	-.9245	0.0000	0.0000
16	-.33063	-1.9855	-1.9866	7.4319	4709.4	4.1092	12.1984	16.2962	-7.3607	-1.3874	-1.4049	.1838	-.8735	0.0000	0.0000
17	-.24272	-1.8224	-1.8295	7.4656	4751.2	4.1973	12.2826	16.3804	-7.2765	-1.3103	-1.3341	.1880	-.8199	0.0000	0.0000
18	-.15450	-1.6581	-1.6714	7.4972	4797.4	4.2856	12.3681	16.4645	-7.1924	-1.2326	-1.2630	.1938	-.7637	0.0000	0.0000
19	-.06584	-1.4924	-1.5122	7.5271	4850.1	4.3742	12.4556	16.5484	-7.1085	-1.1542	-1.1915	.2019	-.7058	0.0000	0.0000
20	.02281	-1.3262	-1.3527	7.5554	4911.0	4.4628	12.5449	16.6316	-7.0253	-1.0755	-1.1200	.2130	-.6461	0.0000	0.0000
21	.11131	-1.1598	-1.1931	7.5823	4982.8	4.5513	12.6371	16.7138	-6.9431	-.9961	-1.0482	.2281	-.5847	0.0000	0.0000
22	.19922	-.9940	-1.0344	7.6078	5069.0	4.6392	12.7325	16.7942	-6.8627	-.9169	-.9765	.2485	-.5217	0.0000	0.0000
23	.28649	-.8286	-.8763	7.6322	5174.0	4.7265	12.8330	16.8726	-6.7843	-.8362	-.9037	.2757	-.4564	0.0000	0.0000
24	.37336	-.6626	-.7176	7.6557	5304.1	4.8134	12.9434	16.9487	-6.7082	-.7515	-.8258	.3116	-.3863	0.0000	0.0000
25	.45895	-.4955	-.5576	7.6782	5467.3	4.8989	13.0715	17.0211	-6.6358	-.6556	-.7359	.3584	-.3029	0.0000	0.0000
26	.53989	-.3283	-.3973	7.6992	5675.4	4.9799	13.2322	17.0858	-6.5711	-.5321	-.6200	.4177	-.1885	0.0000	0.0000
27	.61227	-.1594	-.2361	7.7179	5934.0	5.0523	13.4408	17.1388	-6.5181	-.3636	-.4622	.4926	-.0185	0.0000	0.0000
28	.66993	.0105	-.0749	7.7329	6300.7	5.1099	13.7384	17.1703	-6.4866	-.1224	-.2305	.5842	.2127	-.2684	0.0000
29	.71069	.1769	.0840	7.7440	6722.8	5.1508	14.0897	17.1828	-6.4741	.1443	.0328	.6836	.4255	-.9992	0.0000
30	.74213	.3447	.2442	7.7528	7085.6	5.1821	14.3377	17.1911	-6.4658	.3727	.2496	.7798	.5485	-.5526	0.0000
31	.76878	.5130	.4026	7.7605	7403.8	5.2087	14.5567	17.1982	-6.4587	.5695	.4297	.8660	.5992	-.3146	0.0000
32	.79286	.6798	.5580	7.7676	7691.3	5.2327	14.7419	17.2052	-6.4517	.7385	.5853	.9388	.6017	-.1906	0.0000
33	.81608	.8463	.7130	7.7747	7955.8	5.2560	14.9027	17.2131	-6.4437	.8870	.7235	1.0012	.5885	-.1214	0.0000
34	.83937	1.0125	.8688	7.7818	8209.4	5.2794	15.0488	17.2222	-6.4347	1.0220	.8523	1.0569	.5708	-.0790	0.0000
35	.86323	1.1786	1.0254	7.7893	8450.9	5.3032	15.1816	17.2324	-6.4245	1.1511	.9724	1.1078	.5507	-.0598	0.0000
36	.88811	1.3459	1.1830	7.7972	8686.0	5.3282	15.3051	17.2443	-6.4125	1.2765	1.0873	1.1560	.5254	-.0343	0.0000
37	.91397	1.5123	1.3398	7.8055	8916.3	5.3539	15.4213	17.2574	-6.3995	1.3957	1.1982	1.2015	.5104	-.0348	0.0000
38	.94139	1.6788	1.4975	7.8143	9136.9	5.3815	15.5288	17.2729	-6.3840	1.5088	1.3032	1.2451	.4854	-.0118	0.0000
39	.97057	1.8458	1.6569	7.8239	9369.1	5.4106	15.6371	17.2893	-6.3676	1.6192	1.4118	1.2874	.4573	-.0231	0.0000
40	1.00167	2.0113	1.8166	7.8340	9578.8	5.4417	15.7333	17.3089	-6.3479	1.7174	1.5097	1.3300	.4012	-.0016	0.0000

Табл. 4. Модель атмосферы Солнца.

Модель атмосферы Солнца, полученная Куруцем, показана в табл.4. Студенту по таблице следует ответить на два вопроса. Какова протяженность атмосферы (столбец 5 дает протяженность в см. в логарифмической форме)? На какой оптической глубине (данной также в логарифмической форме) эффективная температура равна локальной температуре?

Сетка теоретических спектров приведена на рис. 60. На рисунке хорошо проявляются линии водорода серии Бальмера и их сгущение по мере приближения к Бальмеровскому скачку при $\lambda=3646$ А. Излучение за пределом лаймановского скачка при $\lambda=912$ А имеет малые значения и поэтому не показаны.

Для примера приводим сравнение теоретического спектра, полученного по моделям, и наблюдаемого спектра для звезды Вега (рис. 61).

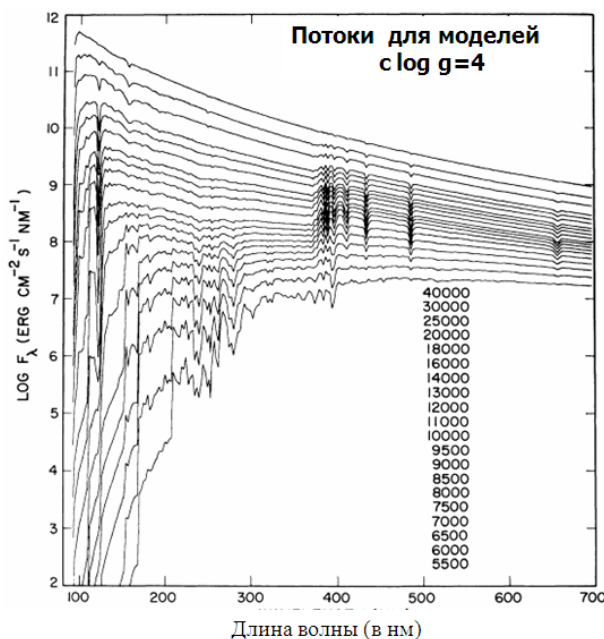
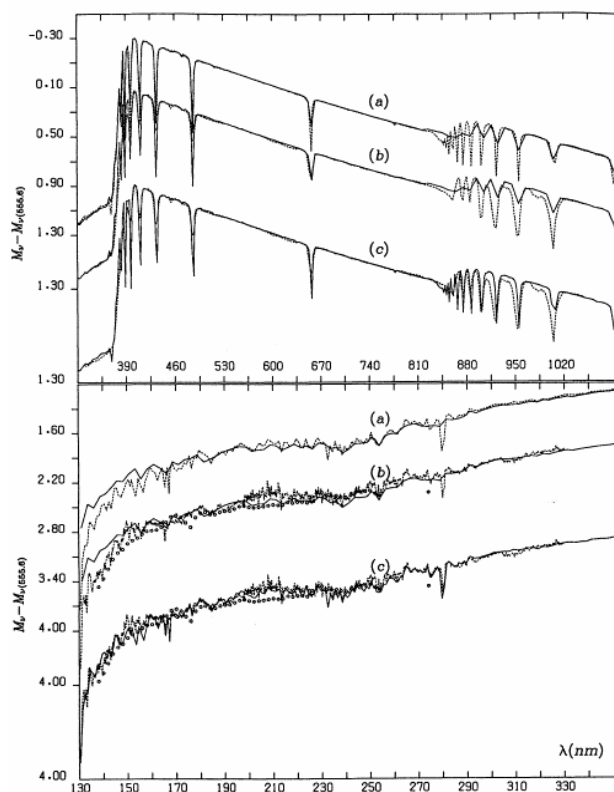


Рис. 60. Сетка теоретических потоков, полученных Куруцем Р.

Рис. 61. Теоретический и наблюдаемый спектры звезды Вега

На рисунке теоретические потоки по модели Куруца показаны сплошными линиями, а наблюдения – штриховыми линиями. Поскольку согласие хорошее, то можно сделать вывод, что вычисленная модель атмосферы соответствует атмосфере звезды. Кроме того, выбранные параметры модели $T_{eff}=9550K$ и $\log g=3.95$ являются параметрами самой звезды Вега.



И заключительные замечания. Расчеты моделей атмосфер показали, что при определенном наборе T_{eff} и $\log g$ невозможно вычислить строение верхних слоев атмосферы. В ряде случаев давление излучения может превышать давление гравитации. Тогда гидростатическое равновесие нарушается: вещество атмосферы начинает истекать с поверхности. Это явление называется звездным ветром. Понятно, что это может быть у звезд, у которых:

- мало ускорение силы тяжести;
- или очень большая температура.

Оценим максимальную светимость звезды (называемая как эддингтоновская светимость), при которой атмосфера еще остается стационарной, т.е. без признаков расширения. Силы гравитации равны

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2}.$$

Здесь M - масса звезды, R – радиус, m - масса частицы, испытывающей давление света. Для вычисления силы лучевого давления F_{rad} , нам нужно знать величину такого давления. Оно определяется для сферически симметричного случая как

$$P_{rad} = \frac{L}{c} \frac{1}{4\pi R^2}.$$

Ясно, что силы светового давления зависят от эффективности частиц поглощать кванты, другими словами, от коэффициента поглощения α . Поэтому можно записать, что

$$F_{rad} = P_{rad} \alpha m.$$

Здесь лучевое давление рассматривается как сила в расчете на единичную площадку, коэффициент α рассчитывается на единицу массы. Приравнявая обе силы, имеем

$$G \frac{Mm}{R^2} = \frac{L \alpha m}{4\pi R^2 c} \Rightarrow L = \frac{4\pi MGc}{\alpha}.$$

Следуя последней формуле, можно рассмотреть наиболее интересный и важный случай, когда ЗА состоит из ионизованного водорода, и поэтому основным источником для коэффициента α является рассеяние на электронах с коэффициентом рассеяния σ_e . Давление излучения за счет рассеяния на протонах не создает радиального движения протонов из-за их большой массы. Но в результате электростатического взаимодействия между протонами и движущимися радиально электронами под влиянием сил светового давления протоны с массой m_p также участвуют в движении. Поэтому можно считать, что $\alpha = \sigma_e / m_p$. Тогда для эддингтоновской светимости имеем следующее соотношение

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMcm_p}{\sigma_e} \approx 1.26 * 10^{38} \left(\frac{M}{M_0} \right) \text{ эрг/сек.}$$

(M_0 есть солнечная масса). Таким образом, если звезда превышает по светимости предел Эддингтона L_{Edd} , то атмосфера звезды не может быть стационарной: ее вещество будет испытывать радиальное движение. Поэтому описанный выше метод моделирования ЗА к таким атмосферам не применим.

На рис. 62 показан диапазон параметров, при которых возможен расчет стационарных классических звездных атмосфер.

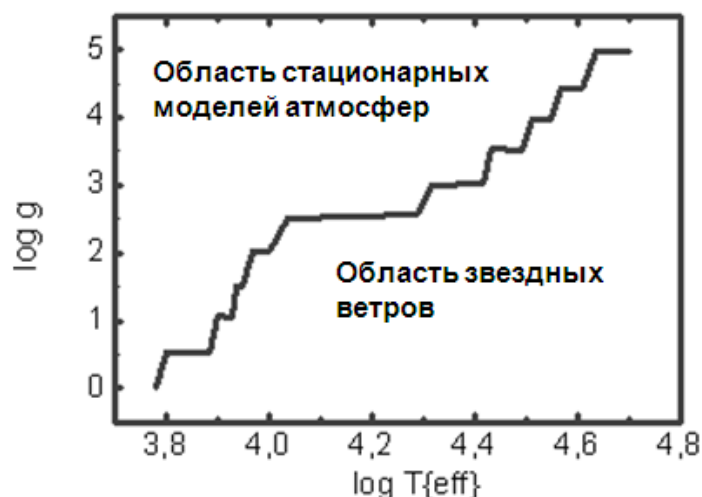


Рис. 62. Область на теоретической диаграмме Рессела-Герцшпрунга, в которой невозможны расчеты МА.

За последнее десятилетие было сделано существенное продвижение в теории моделирования ЗА. Увеличение данных об атомарных процессах и расширение компьютерных возможностей позволило астрофизикам отказаться от ряда «классических» предположений (см. табл. 5) .

Программа	Учет сферичности	Учет не-ЛТР эффектов	Учет покровного эффекта	Учет расширения ЗА	Трехмерность
ATLAS9 ATLAS12	-	-	+	-	-
SATLAS	+	-	+	-	-
TMAP	+	+	+	+	-
MARCS			+		
TLUSTY		+	+		
PHOENIX	+	+	+	+	

Табл. 5. Возможности вычислительных программ

Остановимся кратко на описании моделей.

TLUSTY (Hubeny & Lanz, 1995, <http://nova.astro.umd.edu/Tlusty2002/tlusty3grids.html>). Использовался метод линеаризации. Плоскопараллельные модели. Учтен покровной эффект. Имеются два варианта моделей – для О - и В - звезд (см. рис. 63).

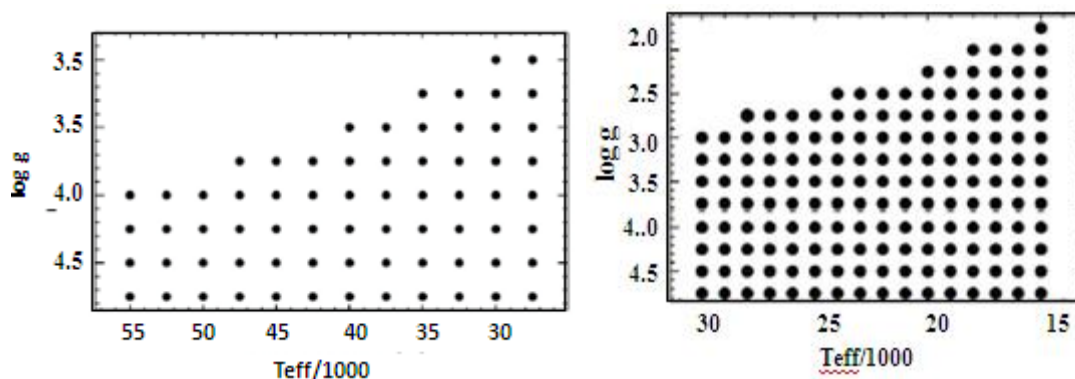


Рис. 63. Слева: модели для О - звезд. Справа: модели для В - звезд.

MARCS (<http://marcs.astro.uu.se/>) Рассчитаны 52000 моделей для звезд классов F, G, R. Диапазон температур 4000-7500 К. Диапазон металличности (-0.5 - +4.0). Учтен покровной эффект в варианте OS. Конвекция учтена в варианте длины перемешивания с $\alpha = 1.5$.

MAFAGS Модели почти идентичны моделям Куруца. Конвекция учтена при $\alpha = 0.82$). Покровной эффект учтен в двух вариантах: ODF и OS. Диапазон температур 4600 - 15000 К.

CMFGEN (Hillier, <http://kookaburra.phyast.pitt.edu/hillier/web/CMFGEN.htm>). Сферические модели для W-R звезд, О звезд и ярких голубых гигантов.

FASTWIND (Puls, 2005, A&A, 435, 669). Сферические, и бланкетированные не-ЛТР модели для фотосферы и звездного ветра.

PHOENIX (<http://www.hs.uni-hamburg.de/EN/For/ThA/phoenix/index.html>). Плоскопараллельные и сферические модели. Конвекция учтена в приближении длины перемешивания. Покровной эффект учтен прямым методом. Учтены 5-20 млн. атомарных и 15-300 млн. молекулярных линий. Не-ЛТР эффекты учтены для H, He, C, N, J, Mg, Fe (включены 10^4 уровней и 10^5 b-b-переходов). Эти модели относят к моделям Нового Поколения. Возможен учет расширения ЗА. Сетка рассчитанных моделей показана на рис.50.

Модели нового поколения

Более подробно остановимся на так называемых «Моделях нового поколения» (New Generation Models=NEWGEN), созданных в последнее десятилетие. Их новизна по сравнению с «классическими» моделями заключается в следующем.

На примере наблюдений Солнца с высоким разрешением можно легко убедиться, что его атмосфера, во-первых, не является одномерной (на поверхности есть гранулы и другие образования, см. рис. 64) и, во-вторых, состояние атмосферы переменное, в частности, вызванное конвекцией, существенной в атмосферах поздних звезд. Необходимость в трехмерных гидродинамических моделях также становится очевидной по следующей причине: все явления, связанные с движениями в ЗА, например, смещение

спектральных линий, их асимметрия и др., в принципе не могут быть объяснены «классическими» моделями 3А. Как было установлено, трехмерные модели с успехом объясняют пространственное и временное поведение гранул, потемнение диска звезд и др.

NEWGEN модели являются первыми попытками моделирования 3А для решения следующих задач.

Во-первых, от одномерной «классической» модели надо перейти к трехмерной 3D модели. В этом случае все характеристики поля излучения зависят не только от глубины z , но и от координат x и y (см. рис. 65). Для поля излучения добавляется еще зависимость от направления лучей, т. е. от углов φ и θ .

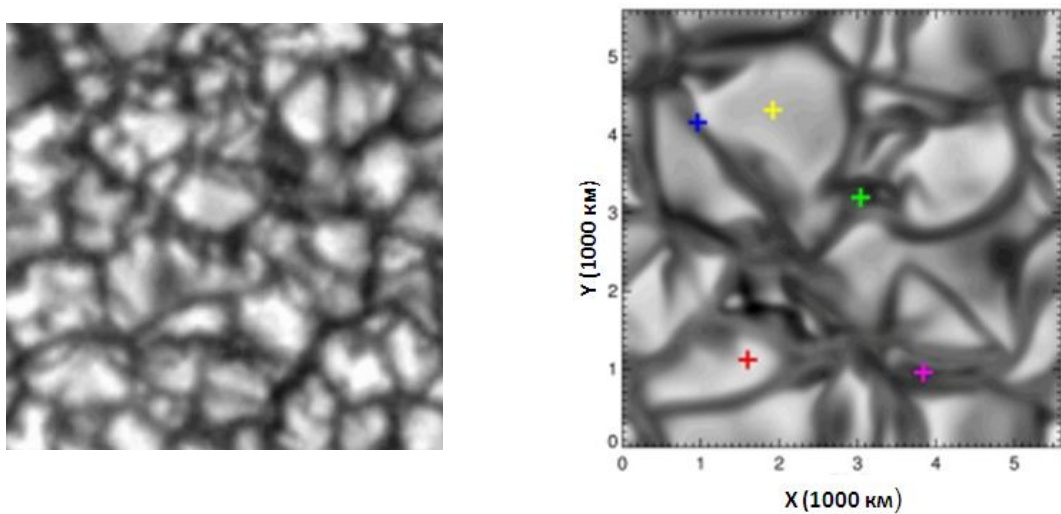


Рис. 64. Слева: наблюдаемая поверхность Солнца с гранулами. Справа: результат численной симуляции поверхности Солнца по NEWGEN (см. ниже). Масштаб изображений разный!

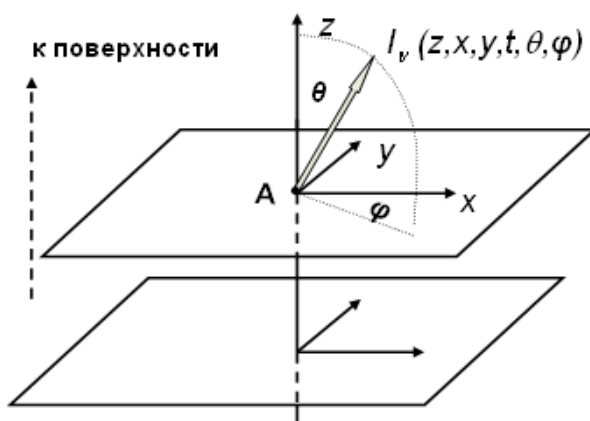


Рис. 65. Геометрия 3D модели

Во-вторых, для учета явлений переменности теперь для любой точки атмосферы необходимо определить: $T(x, y, z, t)$ – температура точки, $P(x, y, z, t)$ – давление, $V(x, y, z, t)$ – поле скоростей, $I_v(x, y, z, \vartheta, \varphi)$ – интенсивность излучения.

В-третьих, для получения этих величин необходимо к уравнениям «классических» моделей добавить ряд уравнений гидродинамики, которые включают уравнения сохранения массы, момента и энергии.

Для численного моделирования, прежде всего, атмосфера разбивается на ряд трехмерных ячеек (вычислительных боксов, см. рис. 66) с таким размером, чтобы в каждую ячейку укладывались 10-20 гранул. Типичный размер ячеек порядка $5000 \times 5000 \times 5000 \text{ км}^3$. Дискретизация уравнений по $\Delta x, \Delta y$ и Δz внутри ячеек порядка $100 \times 100 \times 100 \text{ км}$. Дискретизация по времени Δt порядка 0.1 секунды. Решение уравнения переноса производится для набора лучей, распределенных по углам ϑ и φ . Число таких лучей порядка 10 по каждому углу. Расчет таких моделей очень дорогостоящая процедура с точки зрения компьютерного времени (одна модель считается в течение нескольких месяцев) и требует чрезвычайно мощных компьютеров и применения точных разностных методов представления дифференциальных уравнений.

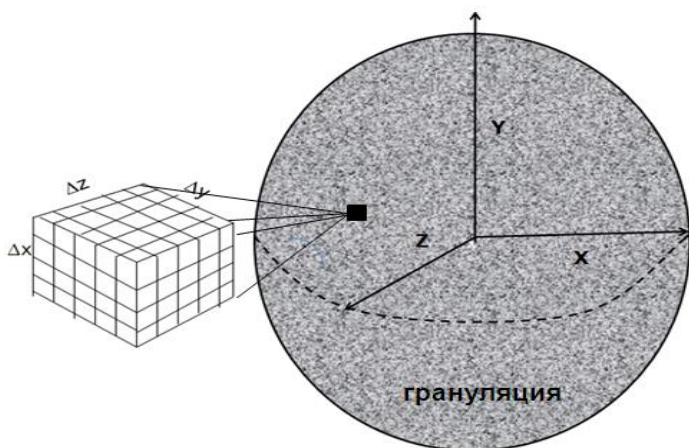


Рис. 66. Вычислительный бокс для 3D модели

Перечень программ, реализующих такие расчеты, приведен в табл.6. На рис. 67 приведены сетки уже рассчитанных моделей.

	Размер бокса (км)	Пространственное разрешение (x,y,z) (км)	Число лучей интенсивности
CO ⁵ BOLD	5600×5600×2300	40×40×15.1	17: Cosθ=1.000, 0.920, 0.739, 0.478, 0.165 φ=0, π/2, π, 3π/2
MURaM	9000×9000×2300	17.6×17.6×10	12
Stagger	6000×6000×2300	25.1×25.1×7.32	12: Cos θ = 0.155, 0.645, 1.000 φ = 0, π/2, π, 3π/2)

Табл.6. Программы расчета NEWGEN моделей.

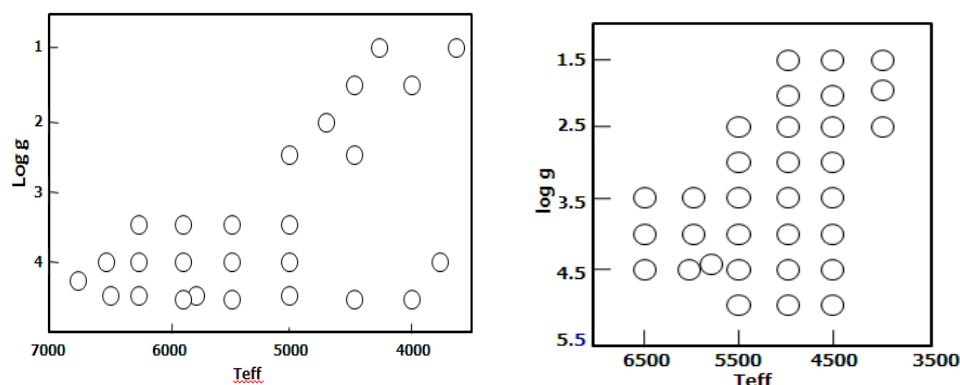


Рис. 67. Слева: Сетка моделей по программе CO⁵BOLD. Справа: сетка моделей по программе STAGGER.

Приведем некоторые результаты таких расчетов. На рис. 68 дано поведение температуры с глубиной. Заштрихованная область это разброс температуры при разных значениях координат x и y . Точечная линия это усредненное по этим координатам распределение. Для сравнения показано распределение температуры для одномерной «классической» модели атмосферы (черная линия).

3D модели хорошо воспроизводят не только глобальные свойства конвективных ячеек (см. рис. 64 справа), но и их изменения во времени.

Эти и другие результаты расчетов 3D модели приводят к поведению спектральных характеристик (силы линий, цвета, смещении и асимметрия линий и др.), отличному от поведения в одномерной модели (см. рис. 69). Детальное описание этих эффектов выходит за рамки этого пособия.

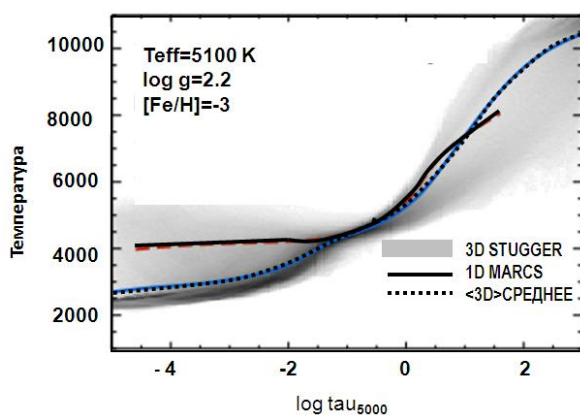


Рис. 68. Распределение температуры в 3D модели.

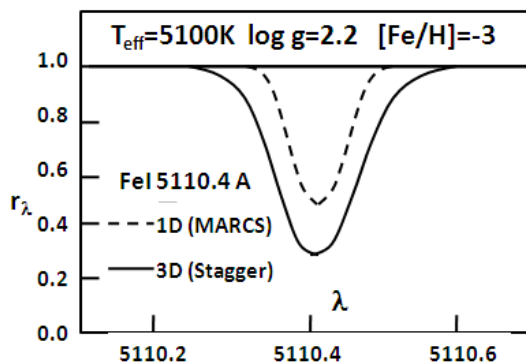


Рис. 69. Профили линии в ЛТР приближении для двух типов моделей для атмосферы холодного гиганта.

Еще раз подчеркнем, что одним из достоинств 3D заключается еще в том, что в этих моделях не вводятся не очень обоснованные предположения о микро или макротурбулентии, которые вводятся в «классических» моделях для согласования с наблюдениями.

В заключение дадим три полезных вывода для пользователей.

- 1) Теперь трехмерные модели становятся доступными для применения. И их желательно использовать для интерпретации наблюдений.
 - 2) Но надо иметь в виду, что эти модели еще не совсем совершенные. Поэтому использовать их надо с осторожностью.
 - 3) Эти модели основаны на своих многочисленных предположениях и упрощениях. Это также надо иметь в виду.
-

Расчет моделей атмосфер – весьма серьезная задача, требующая от исследователей знания физики, численных методов и программирования. Поэтому для стороннего пользователя модель звездной атмосферы представляется как «черный ящик». Дадим дополнительные советы будущему пользователю:

- создать свою или освоить уже разработанную другим исследователем программу расчетов МА;
- или использовать уже имеющиеся сетки МА. Часто параметры исследуемой звезды могут не совпасть с сеточным значением. В этом случае возможна аккуратная интерполяция модели из сетки;
- или попросить опытного исследователя рассчитать необходимую для МА.

Пример простого расчета модели атмосфер и выходящего спектра

Поставим перед собой следующую задачу: вычислить модель чисто водородной атмосферы с $T_{eff}=5600\text{ K}$ и выходящий спектр. Для этого:

- 1) будем считать коэффициенты непрозрачности независимыми от глубины;
- 2) вычислить коэффициенты непрозрачности в зависимости от длины волны;
- 3) определить закон распределения температуры с глубиной;
- 4) определить спектр излучения в диапазоне $3000\text{ \AA} < \lambda < 8600\text{ \AA}$.

1 шаг. Для начала определим коэффициенты поглощения водорода. Из рис. 37 ясно, что:

- для диапазона $912 \text{ \AA} > \lambda > 3646 \text{ \AA}$ надо знать населенности уровней N_2, N_3, N_4 ;
- для диапазона $3646 \text{ \AA} > \lambda > 8206 \text{ \AA}$ надо знать населенности уровней N_3, N_4, \dots ;
- для диапазона $\lambda > 8206 \text{ \AA}$ надо знать населенности уровней N_4, \dots ;

2 шаг. Определим населенности уровней водорода по формуле Больцмана:

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} \exp\left[-(\chi_1 - \chi_n)/kT\right] = n^2 \exp\left[-\Delta E_{1n}/kT\right] = \\ = n^2 10^{[-\Delta E_{1n}(\text{эВ})/kT]}.$$

Напомним, что здесь $g_n = 2n^2$ есть статистический вес уровня, χ_n есть энергия ионизации водорода с уровня n , ΔE_{1n} есть энергия возбуждения уровня n , определяемая по формуле Ридберга:

$$\Delta E_{1n} = \chi \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \chi = 13.60 \text{ эВ}.$$

По этим формулам будем иметь, что

$$\frac{N_2}{N_1} = 4 * 10^{-10.2*0.9} = 2.6 * 10^{-9}, \quad \frac{N_3}{N_1} = 9 * 10^{-11.9*0.9} = 1.2 * 10^{-10}, \\ \frac{N_4}{N_1} = 16 * 10^{-12.75*0.9} = 5.4 * 10^{-11}.$$

3 шаг. Вычисляем коэффициент поглощения в расчете на 1 атом водорода, используя формулу Крамерса:

$$a_{\nu}^{bf} = 2.815 * 10^{25} \frac{Z^4}{n^5 \nu^3} g_{bf} = 1.044 * 10^{-30} \frac{\lambda^3}{n^5} = a_{\nu_0} \frac{\lambda^3}{n^5}.$$

В этих формулах λ выражено в ангстремах (10^{-8} см). Полный коэффициент поглощения будет суммой

$$a_{\nu}^{bf} = a_2 N_2 + a_3 N_3 + a_4 N_4 = \\ = N_1 a_{\nu_0} \lambda^3 \left(\frac{1}{32} \frac{N_2}{N_1} + \frac{1}{243} \frac{N_3}{N_1} + \frac{1}{1024} \frac{N_4}{N_1} \right) \\ = 8.2 * 10^{-11} N_1 a_{\nu_0} \lambda^3 - \text{для } \lambda \geq 3646 \text{ \AA} \\ a_{\nu}^{bf} = a_3 N_3 + a_4 N_4 = \\ = N_1 a_{\nu_0} \lambda^3 \left(\frac{1}{243} \frac{N_3}{N_1} + \frac{1}{1024} \frac{N_4}{N_1} \right) = \\ = 5.5 * 10^{-13} N_1 a_{\nu_0} \lambda^3 - \text{для } 3646 \text{ \AA} < \lambda < 8206 \text{ \AA}, \\ a_{\nu}^{bf} = a_4 N_4 = N_1 a_{\nu_0} \lambda^3 \left(\frac{1}{1024} \frac{N_4}{N_1} \right) = 5.3 * 10^{-14} - \text{для } \lambda \geq 8206 \text{ \AA}$$

Вкладом ионизации с уровней $n > 4$ мы пренебрегаем.

4 шаг. Для будущих расчетов при определении распределения температуры в зависимости от оптической глубины нам следует выбрать «стандартную» оптическую глубину. Такой глубиной можно взять оптическую глубину для излучения, например, на длине волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Поэтому все коэффициенты поглощения нормализуем на коэффициент поглощения при этой длине волны:

$$\begin{aligned}
 a_v^{bf}(\lambda = 5000) &= 5.5 * 10^{-13} N_1 a_{v_0}^{bf}(\lambda = 5000), \\
 \frac{a_v^{bf}}{a_v^{bf}(\lambda = 5000)} &= 149 \left(\frac{\lambda}{5000} \right)^3 - \text{для } \lambda \geq 3646 \text{ \AA}, \\
 &= \left(\frac{\lambda}{5000} \right)^3 - \text{для } 3646 \text{ \AA} < \lambda \leq 8206 \text{ \AA}, \\
 &= 0.096 \left(\frac{\lambda}{5000} \right)^3 - \text{для } \lambda > 8206 \text{ \AA}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов отражены на рис. 70.

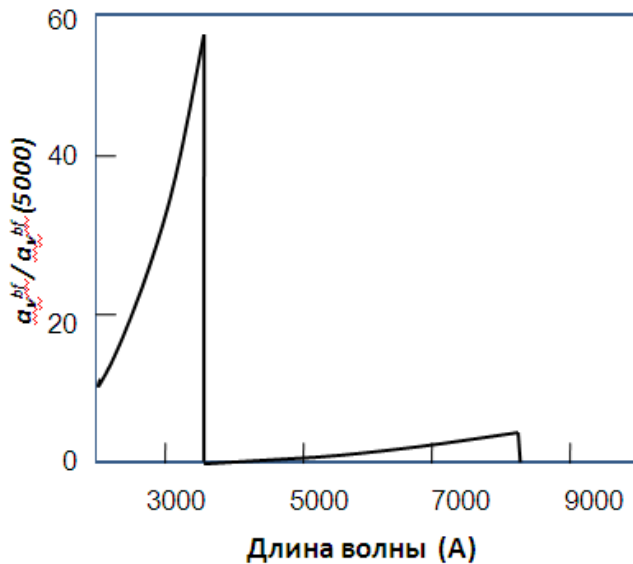


Рис. 70. Нормализованный коэффициент поглощения

5 шаг. Далее необходимо включить условие лучистого равновесия, чтобы получить температурное распределение. Но для простоты мы используем результат решения задачи «серой» атмосферы и запишем следующее распределение температуры:

$$T^4(\tau) = T_{eff}^4 \left(\frac{3}{4} \tau_{5000} + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Для нас важно знать температуру на глубине $\tau_\lambda=2/3$. Дело в том, что согласно соотношению Эддингтона - Барбье излучение исходит с глубины $\tau_\lambda=2/3$, т. е.

$$F(\lambda) = S(\tau_\lambda = \frac{2}{3}) = B \left[T \left(\tau_\lambda = \frac{2}{3} \right) \right].$$

Чтобы использовать соотношение (25), необходимо перейти от шкалы τ_λ шкале τ_{5000} . Это делается в соответствии с формулой

$$\tau_{5000} = \tau_\lambda / (a_\lambda^{bf} / a_{5000}^{bf}).$$

Знаменатель определяется выражением (24) или с использованием рисунка 70. Таким образом, температура на глубине $\tau_\lambda=2/3$ определяется следующим образом

$$T^4(\tau_\lambda) = T_{eff}^4 \left(\frac{3}{4} * \frac{2}{3} \frac{a_\lambda^{bf}}{a_{5000}^{bf}} + \frac{1}{2} \right).$$

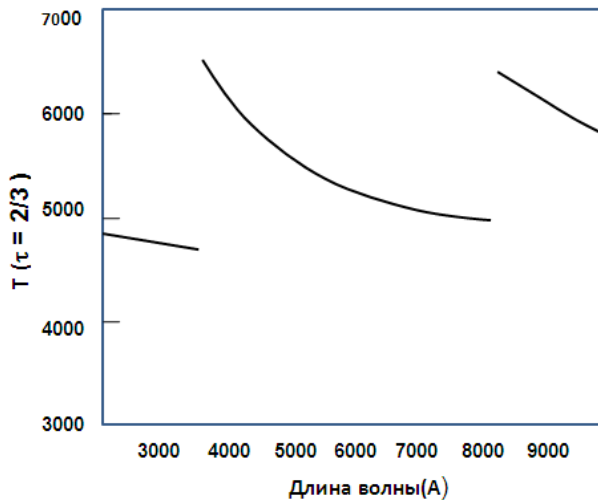


Рис. 71. Температура на глубине $\tau_\lambda=2/3$.

Результат определения температуры приведен на рис. 71.

6 шаг. Заключительный шаг это определение выходящего потока излучения. Он определяется по приведенному выше соотношению Эддингтона-Барбье:

$$F_\lambda(0) = \pi B_\lambda \left[T \left(\tau_\lambda = \frac{2}{3} \right) \right], \quad F_\lambda(0) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T(\tau_\lambda)}\right) - 1}.$$

Результаты этих расчетов показаны на рис. 72. Заметим, что по вертикальной оси отложен поток в единицах (янский/сек/метр²) и в расчете на интервал длин волн в 1 метр.

На рисунке для примера приведено распределение энергии в спектре Солнца. Эффективная температура Солнца $T_{eff}=5700$ К, что близко по значению к температуре нашей модели. Почему же распределение излучения нашей модели и Солнца столь значительно отличаются?

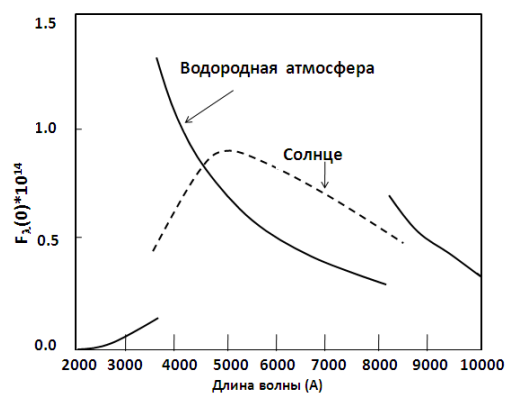


Рис. 72. Распределение энергии, полученной по рассчитанной модели, и в спектре Солнца (для сравнения).